

Vereinbarungen der Fachschaft Mathematik



Gymnasium
Wilnsdorf

Stand: 05.12.2025

Inhalt

1. Die Fachgruppe Mathematik am Gymnasium Wilnsdorf	3
2. Fachcurricula Sek I	4
2.1 Jahrgangsstufe 5	4
2.2 Jahrgangsstufe 6	12
2.3 Jahrgangsstufe 7	19
2.4 Jahrgangsstufe 8	26
2.5 Jahrgangsstufe 9	34
2.6 Jahrgangsstufe 10	42
3. Fachcurricula Sek II	52
3.1 Unterrichtsvorhaben	52
3.1.1 Unterrichtsvorhaben Einführungsphase	53
3.1.2 Unterrichtsvorhaben Qualifikationsphase	64
3.1.3 Unterrichtsvorhaben GK	65
3.1.4 Unterrichtsvorhaben LK	89
3.1.5 MKR	123
3.1.6 Vertiefungskurse	128
4. Kriterien der Leistungsbewertung im Fach Mathematik	130
4.1 Kriterien der sonstigen Mitarbeit im Fach Mathematik	133
4.2 Mitarbeit im Unterricht	136
4.3 Schriftliche Leistungen	137
4.3.1 Sekundarstufe I	137
4.3.2 Sekundarstufe II	137
4.4 Dauer und Anzahl der Klassenarbeiten / Klausuren	138
4.5 Gesamtnote (Wertungsverhältnis: Mitarbeit im Unterricht / schriftlich)	138

1. Die Fachgruppe Mathematik am Gymnasium Wilnsdorf

Das Gymnasium Wilnsdorf ist im Umkreis von zwölf Kilometern das einzige Gymnasium im ländlichen Raum. Unsere Schule zählt zum Standorttyp 1 und ist in der Sekundarstufe I größtenteils vierzügig im G9.

In die Einführungsphase der Sekundarstufe II wurden in den letzten Jahren regelmäßig etwa 15 Schülerinnen und Schüler aufgenommen, überwiegend aus den umliegenden Realschulen. In der Regel werden in der Einführungsphase drei bis vier parallele Grundkurse eingerichtet, aus denen sich für die Qualifikationsphase zwei Leistungskurse und zwei Grundkurse entwickeln.

Gerade Anzahlen von Fachunterrichtsstunden werden im 90-Minuten-Takt gehalten, ungerade Anzahlen werden mit einer 45-Minuten-Stunde ergänzt.

Den im Leitbild ausgewiesenen Grundgedanken für das Zusammenleben am Gymnasium Wilnsdorf, Schülerinnen und Schüler ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern und ihnen Orientierung für ihren weiteren Lebensweg zu bieten, fühlt sich die Fachschaft Mathematik in besonderer Weise verpflichtet:

Regelmäßig werden ein bis zwei Vertiefungskurse eingerichtet für das Fach Mathematik. Die Schülerinnen und Schüler werden insbesondere durch die Fachkollegen zu einer mathematischen Facharbeit angeregt. Im Selbstlernzentrum stehen geeignete Materialien und Medien bzw. Internetzugänge für gemeinschaftliches Nacharbeiten zur Verfügung.

Die Schülerinnen und Schüler werden bereits ab Klasse 5 zur Teilnahme an mathematischen Wettbewerben angehalten, wie der Mathe-Olympiade, dem Känguru-Wettbewerb und dem Bundeswettbewerb Mathematik.

Die Ergebnisse der Vergleichsklausuren Einführungsphase werden jeweils nachhaltig in der Fachkonferenz reflektiert.

Zu Beginn des Schuljahres 2023/24 sind unser Fachvorsitzenden Herr Schütz und Herr Usta.

Zu Beginn der Klasse 7 wird der Taschenrechner TI -30X Prio MP verbindlich eingeführt und bei allen mathematischen Inhalten eingebunden.

Der CAS-Taschenrechner TI-Nspire-CX CAS II wird verbindlich zu Beginn der Einführungsphase eingeführt.

Nicht nur der Fachschaft Mathematik stehen zwei vollausgestattete PC-Räume zur Verfügung mit jeweils 15 Arbeitsplätzen.

2. Fachcurricula Sek I

Die Kernlehrpläne betonen, dass eine umfassende mathematische Grundbildung im Mathematikunterricht erst durch die Vernetzung von Inhaltenfeldern und (prozessbezogenen) Kompetenzbereichen erreicht werden kann. Für den Mathematikunterricht besonders relevante Verknüpfungen werden dabei vom Kernlehrplan vorgegeben.

Dementsprechend sind die inhalts- und die prozessbezogenen Kompetenzen innerhalb aller Unterrichtsvorhaben eng miteinander verwoben. Die fünf prozessbezogenen Kompetenzbereiche **Operieren, Modellieren, Problemlösen, Argumentieren** und **Kommunizieren** werden im vielfältigen Aufgabenmaterial durchgehend aufgegriffen und geübt.

2.1 Jahrgangsstufe 5

Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

<p><u>Unterrichtsvorhaben I:</u></p> <p>Thema: Zahlen und Größen</p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> Grundrechenarten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division natürlicher Zahlen Darstellung: Stellenwerttafel, Zahlenstrahl, Wortform Größen und Einheiten: Länge, Zeit, Geld, Masse <p>Zeitbedarf: 25 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben II:</u></p> <p>Thema: Symmetrie</p> <p>Inhaltsfeld: Geometrie</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> Ebene Figuren: besondere Dreiecke, besondere Vier-ecke, Strecke, Gerade, kartesisches Koordinatensystem, Zeichnung Lagebeziehung und Symmetrie: Parallelität, Orthogonalität, Punkt- und Achsensymmetrie Abbildungen: Punkt- und Achsenspiegelungen <p>Zeitbedarf: 15 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben III:</u></p> <p>Thema: Rechnen mit natürlichen Zahlen</p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> Grundrechenarten: schriftliche Division Gesetze und Regeln: Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz für Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen, Teilbarkeitsregeln Grundvorstellung/ Basiskonzepte: Primfaktorzerlegung, Rechenterm <p>Zeitbedarf: 30 Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u></p> <p>Thema: Flächen</p> <p>Inhaltsfeld: Geometrie, Arithmetik / Algebra, Funktionen</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> Ebene Figuren: Umfang und Flächeninhalt (Rechteck, rechtwinkliges Dreieck), Zerlegungs- und Ergänzungsstrategien Größen und Einheiten: Flächeninhalt 	<p><u>Unterrichtsvorhaben V:</u></p> <p>Thema: Körper</p> <p>Inhaltsfeld: Geometrie, Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> Körper: Quader, Pyramide, Zylinder, Kegel, Kugel, Schrägbilder und Netze (Quader und Würfel), Oberflächeninhalt und Volumen (Quader und Würfel) Größen und Einheiten: Volumen 	<p><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u></p> <p>Thema: Brüche – das Ganze und seine Teile</p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> Grundvorstellung/ Basiskonzepte: Anteile, Kürzen, Erweitern Zahlbereichserweiterung: Positive rationale Zahlen Darstellung: Zahlenstrahl, Wortform, Bruch, Prozentzahl

<ul style="list-style-type: none">● Zusammenhang zwischen Größen: Maßstab	Zeitbedarf: 25 Std.	Zeitbedarf: 20 Std.
Zeitbedarf: 25 Std.		

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV I Zahlen und Größen	Die Schülerinnen und Schüler....	Die Schülerinnen und Schüler....	
1 Zählen und Darstellen 2 Zahlen ordnen 3 Große Zahlen und Runden 4 Grundrechenarten 5 Rechnen mit Geld 6 Rechnen mit Längenangaben 7 Rechnen mit Gewichtsangaben 8 Rechnen mit Zeitangaben	Arithmetik / Algebra (4) verbalisieren Rechenterme unter Verwendung von Fachbegriffen und übersetzen Rechenanweisungen und Sachsituationen in Rechenterme (Ope-3, Kom-5, Kom-6) (5) kehren Rechenanweisungen um (Pro-6, Pro-7) (9) schätzen Größen, wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus und wandeln sie um (Ope-7) ● (14) führen Grundrechenarten in unterschiedlichen Darstellungen sowohl im Kopf als auch schriftlich durch und stellen Rechenschritte nachvollziehbar dar (Ope-1, Ope-4, Kom-5, Kom-8) Stochastik (1) erheben Daten, fassen sie in Ur- und Strichlisten zusammen und bilden geeignete Klasseneinteilungen (Mod-3)	Ope-3 übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt Kom-5 verbalisieren eigene Denkprozesse und beschreiben eigene Lösungswege Kom-6 verwenden in angemessenem Umfang die fachgebundene Sprache Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Pro-7 überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen Ope-7 führen Lösungs- und Kontrollverfahren sicher und effizient durch Ope-1 wenden grundlegende Kopfrechenfähigkeiten sicher an Ope-4 führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch Kom-8 dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar und präsentieren diese Mod-3 treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor	2.1
Römische Zahlzeichen (fakultativ) Zählen und Darstellen mit dem Computer	Stochastik (2) stellen Häufigkeiten in Tabellen und Diagrammen dar auch unter Verwendung digitaler Hilfsmittel (Tabellenkalkulation) (Ope-11) (3) bestimmen, vergleichen und deuten Häufigkeiten und Kenngrößen statistischer Daten (Mod-7, Kom-1)	Ope-11 nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (Tabellenkalkulation) Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Kom-1 entnehmen und strukturieren Informationen aus mathemathikhaltigen Texten und Darstellungen	1.2

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV II Symmetrie	Die Schülerinnen und Schüler....	Die Schülerinnen und Schüler....	
1 Senkrechte und parallele Geraden – Abstände 2 Koordinatensystem 3 Achsensymmetrische Figuren 4 Punktssymmetrische Figuren 5 Eigenschaften von Vielecken	Geometrie (1) erläutern Grundbegriffe und verwenden diese zur Beschreibung von ebenen Figuren und Körpern sowie deren Lagebeziehungen zueinander (Ope-3) (2) charakterisieren und klassifizieren besondere Vierecke (Arg-4, Kom-6) (4) zeichnen ebene Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal, Geodreieck oder dynamische Geometriesoftware (Ope-9) (5) erzeugen ebene symmetrische Figuren und Muster und ermitteln Symmetrieachsen bzw. Symmetriepunkte (Ope-8) (6) stellen ebene Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar (Ope-9, Ope-11) (7) erzeugen Abbildungen ebener Figuren durch Verschieben und Spiegeln, auch im Koordinatensystem (Ope-9, Ope-11) (8) nutzen dynamische Geometriesoftware zur Analyse von Verkettungen von Abbildungen ebener Figuren (Ope-11, Ope-12)	Ope-3 übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt Arg-4 stellen Relationen zwischen Fachbegriffen her (Ober-/Unterbegriff) Kom-6 verwenden in angemessenem Umfang die fachgebundene Sprache Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln Ope-9 nutzen mathematische Hilfsmittel (Lineal, Geodreieck und Zirkel) zum Messen, genauen Zeichnen und Konstruieren Ope-11 nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (Geometriesoftware) Ope-12 entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus	1.2
DGS – Geometrie mit dem Computer Erklärfilme und Stop-Motion-Tricks: Erzeugen von Symmetrien (fakultativ)			1.2

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV III Rechnen mit natürlichen Zahlen	Die Schülerinnen und Schüler....	Die Schülerinnen und Schüler....	
1 Terme 2 Rechenvorteile beim Addieren und Multiplizieren 3 Ausklammern und Ausmultiplizieren 4 Potenzieren 5 Teilbarkeit 6 Primzahlen und Primfaktorzerlegung 7 Schriftliches Addieren und Subtrahieren 8 Schriftliches Multiplizieren 9 Schriftliches Dividieren 10 Sachaufgaben systematisch lösen	Arithmetik / Algebra <p>(1) erläutern Eigenschaften von Primzahlen, zerlegen natürliche Zahlen in Primfaktoren und verwenden dabei die Potenzschreibweise (Ope-4, Arg-4)</p> <p>(2) bestimmen Teiler natürlicher Zahlen, wenden dabei die Teilbarkeitsregeln für 2, 3, 4, 5 und 10 an und kombinieren diese zu weiteren Teilbarkeitsregeln (Ope-5, Arg-5, Arg-6, Arg-7)</p> <p>(3) begründen mithilfe von Rechengesetzen Strategien zum vorteilhaften Rechnen und nutzen diese (Ope-4, Arg-5)</p> <p>(4) verbalisieren Rechenterme unter Verwendung von Fachbegriffen und übersetzen Rechenanweisungen und Sachsituationen in Rechenterme (Ope-3, Kom-5, Kom-6)</p> <p>(6) nutzen Variablen bei der Formulierung von Rechengesetzen und bei der Beschreibung von einfachen Sachzusammenhängen (Ope-5)</p> <p>(14) führen Grundrechenarten in unterschiedlichen Darstellungen sowohl im Kopf als auch schriftlich durch und stellen Rechenschritte nachvollziehbar dar (Ope-1, Ope-4, Kom-5, Kom-8)</p>	Ope-4 führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch Arg-4 stellen Relationen zwischen Fachbegriffen her (Ober-/Unterbegriff) Ope-5 arbeiten unter Berücksichtigung mathematischer Regeln und Gesetze mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente Arg-6 verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten Arg-7 nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch) Ope-3 übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt Kom-5 verbalisieren eigene Denkprozesse und beschreiben eigene Lösungswege Kom-6 verwenden in angemessenem Umfang die fachgebundene Sprache Ope-1 wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an Kom-8 dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar und präsentieren diese	

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
Kapitel IV Flächen	Die Schülerinnen und Schüler....	Die Schülerinnen und Schüler....	
1 Flächeninhalte vergleichen 2 Flächeneinheiten 3 Flächeninhalt eines Rechtecks 4 Flächeninhalte rechtwinkliger Dreiecke 5 Umfang von Figuren 6 Schätzen und Rechnen mit Maßstäben	Arithmetik / Algebra (9) schätzen Größen, wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus und wandeln sie um (Ope-7) Geometrie (10) schätzen die Länge von Strecken und bestimmen sie mithilfe von Maßstäben (Ope-9) (11) nutzen das Grundprinzip des Messens bei der Flächen- und Volumenbestimmung (Ope-4, Ope-8) (12) berechnen den Umfang von Vierecken, den Flächeninhalt von Rechtecken, Parallelogramm und rechtwinkligen Dreiecken (...) (Ope-4, Ope-8) (13) bestimmen den Flächeninhalt ebener Figuren durch Zerlegungs- und Ergänzungsstrategien (Arg-5) Funktionen (4) rechnen mit Maßstäben und fertigen Zeichnungen in geeigneten Maßstäben an (Ope-4, Ope-8)	Ope-7 führen Lösungs- und Kontrollverfahren sicher und effizient durch Ope-3 übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt Ope-9 nutzen mathematische Hilfsmittel (Lineal, Geodreieck und Zirkel) zum Messen, genauen Zeichnen und Konstruieren Ope-4 führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente	
Sportplätze sind auch Flächen (fakultativ)			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV V Körper 1 Körper und Netze 2 Netze von Quadern und Würfeln 3 Schrägbilder 4 Rauminhalte vergleichen 5 Volumeneinheiten 6 Volumen eines Quaders 7 Oberflächeninhalte von Quadern und Würfeln	Die Schülerinnen und Schüler.... Arithmetik / Algebra (9) schätzen Größen, wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus und wandeln sie um (Ope-7) Geometrie (1) erläutern Grundbegriffe und verwenden diese zur Beschreibung von ebenen Figuren und Körpern sowie deren Lagebeziehungen zueinander (Ope-3) (3) identifizieren und charakterisieren Körper in bildlichen Darstellungen und in der Umwelt (Ope-2, Ope-3, Mod-3, Mod-4, Kom-3) (11) nutzen das Grundprinzip des Messens bei der Flächen- und Volumenbestimmung (Ope-4, Ope-8) (12) berechnen (...) den Oberflächeninhalt und das Volumen von Quadern (Ope-4, Ope-8) (14) beschreiben das Ergebnis von Drehungen und Verschiebungen eines Quaders aus der Vorstellung heraus (Ope-2) (15) stellen Quader und Würfel als Netz, Schrägbild und Modell dar und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen (Ope-2, Mod-1, Kom-3)	Die Schülerinnen und Schüler.... Ope-2 stellen sich geometrische Situationen räumlich vor und wechseln zwischen Perspektiven Ope-3 übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt Ope-4 führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch Ope-7 führen Lösungs- und Kontrollverfahren sicher und effizient durch Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln Mod-1 erfassen reale Situationen und beschreiben diese mit Wörtern und Skizzen Mod-3 treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen Kom-3 erläutern Begriffsinhalte anhand von typischen inner- und außermathematischen Anwendungssituationen.	
Modellieren mit Quadern und Würfeln (fakultativ)			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV VI Brüche – das Ganze und seine Teile	Die Schülerinnen und Schüler....	Die Schülerinnen und Schüler....	
1 Bruch und Anteil 2 Kürzen und erweitern 3 Brüche vergleichen 4 Prozente 5 Brüche als Quotienten 6 Brüche auf dem Zahlenstrahl	Arithmetik / Algebra (8) stellen Zahlen auf unterschiedlichen Weisen dar, vergleichen sie und wechseln situationsangemessen zwischen den verschiedenen Darstellungen (Ope-3) (11) deuten Brüche als Anteile, Operatoren, Quotienten, Zahlen und Verhältnisse (Ope-6) (12) kürzen und erweitern Brüche und deuten dies als Vergröbern bzw. Verfeinern der Einteilung (Ope-3, Ope-4) (13) berechnen und deuten Bruchteil, Anteil und Ganzes im Kontext (Ope-4, Mod-4)	Ope-3 übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt Ope-6 führen Darstellungswechsel sicher aus Ope-4 führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen	
Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) und größter gemeinsamer Teiler (ggT) Euklidischer Algorithmus (fakultativ)			6.2 6.3

2.2 Jahrgangsstufe 6

Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

<p><u>Unterrichtsvorhaben I:</u></p> <p>Thema: Brüche in Dezimalschreibweise</p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte</p> <ul style="list-style-type: none"> Grundvorstellung/ Basiskonzepte: Anteile, Bruchteile von Größen Darstellung: Stellenwerttafel, Zahlenstrahl, Wortform, Bruch, endliche und periodische Dezimalzahl, Prozentzahl <p>Zeitbedarf: 30 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben II:</u></p> <p>Thema: Zahlen addieren und subtrahieren</p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> Grundrechenarten: Addition und Subtraktion einfacher Brüche und endlicher Dezimalzahlen <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben III:</u></p> <p>Thema: Geometrische Abbildungen</p> <p>Inhaltsfeld: Geometrie</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> Ebene Figuren: Kreis, Winkel, Strecke, Gerade, kartesisches Koordinatensystem, Zeichnung Abbildungen: Verschiebungen, Drehungen, Punkt- und AchsenSpiegelungen <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u></p> <p>Thema: Zahlen multiplizieren und dividieren</p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> Grundrechenarten: Multiplikation und Division einfacher Brüche und endlicher Dezimalzahlen, schriftliche Division 	<p><u>Unterrichtsvorhaben V:</u></p> <p>Thema: Daten</p> <p>Inhaltsfeld: Stochastik</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> Statistische Daten: Datenerhebung, Ur- und Strichlisten, Klasseneinteilung, Säulen- und Kreisdiagramme, Boxplots, relative und absolute Häufigkeit, Kenngrößen (arithmetisches Mittel, Median, Spannweite, Quartile) <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u></p> <p>Thema: Strukturen erkennen und beschreiben</p> <p>Inhaltsfeld: Funktionen, Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <ul style="list-style-type: none"> Zusammenhang zwischen Größen: Diagramm, Tabelle, Wortform, Dreisatz Zahlbereichserweiterung: ganze Zahlen <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>

Zeitbedarf: 30 Std.		
---------------------	--	--

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV I Brüche in Dezimalschreibweise	Die Schülerinnen und Schüler....	Die Schülerinnen und Schüler....	
1 Dezimalschreibweise 2 Dezimalzahlen vergleichen und runden 3 Abbrechende und periodische Dezimalzahlen 4 Dezimalschreibweise bei Größen	Arithmetik / Algebra (8) stellen Zahlen auf unterschiedlichen Weisen dar, vergleichen sie und wechseln situationsangemessen zwischen den verschiedenen Darstellungen (Ope-3) (9) schätzen Größen, wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus und wandeln sie um (Ope-7) (10) runden Zahlen im Kontext sinnvoll und wenden Überschlag und Probe als Kontrollstrategien an (Ope-7)	Ope-3 übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt Ope-7 führen Lösungs- und Kontrollverfahren sicher und effizient durch	

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV II Zahlen addieren und subtrahieren	Die Schülerinnen und Schüler....	Die Schülerinnen und Schüler....	
1 Brüche addieren und subtrahieren 2 Dezimalzahlen addieren und subtrahieren 3 Geschicktes Rechnen mit Brüchen und Dezimalzahlen 4 Addieren und Subtrahieren von Größen	Arithmetik / Algebra (10) runden Zahlen im Kontext sinnvoll und wenden Überschlag und Probe als Kontrollstrategien an (Ope-7) (14) führen Grundrechenarten in unterschiedlichen Darstellungen sowohl im Kopf als auch schriftlich durch und stellen Rechenschritte nachvollziehbar dar (Ope-1, Ope-4, Kom-5, Kom-8)	Ope-7 führen Lösungs- und Kontrollverfahren sicher und effizient durch Ope-1 wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an Ope-4 führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch Kom-5 verbalisieren eigene Denkprozesse und beschreiben eigene Lösungswege Kom-8 dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar und präsentieren diese	
Musik und Bruchrechnung (fakultativ)			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV III Geometrische Abbildungen	<p>Die Schülerinnen und Schüler....</p> <p>Geometrie</p> <p>(4) zeichnen ebene Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal, Geodreieck oder dynamische Geometriesoftware (Ope-9)</p> <p>(5) erzeugen ebene symmetrische Figuren und Muster und ermitteln Symmetriearchsen bzw. Symmetriepunkte (Ope-8)</p> <p>(6) stellen ebene Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar (Ope-9, Ope-11)</p> <p>(7) erzeugen Abbildungen ebener Figuren durch Verschieben und Spiegeln, auch im Koordinatensystem (Ope-9, Ope-11)</p> <p>(8) nutzen dynamische Geometriesoftware zur Analyse von Verkettungen von Abbildungen ebener Figuren (Ope-11, Ope-12)</p> <p>(9) schätzen und messen die Größe von Winkeln und klassifizieren Winkel mit Fachbegriffen (Ope-9, Kom-3, Kom-6)</p> <p>Arithmetik / Algebra</p> <p>(15) nutzen ganze Zahlen (...) als Koordinaten</p>	<p>Die Schülerinnen und Schüler....</p> <p>Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln</p> <p>Ope-9 nutzen mathematische Hilfsmittel (Lineal, Geodreieck und Zirkel) zum Messen, genauen Zeichnen und Konstruieren</p> <p>Ope-11 nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (Geometriesoftware, Tabellenkalkulation)</p> <p>Ope-12 entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus</p> <p>Kom-3 erläutern Begriffsinhalte anhand von typischen inner- und außermathematischen Anwendungssituationen</p> <p>Kom-6 verwenden in angemessenem Umfang die fachgebundene Sprache</p>	1.2
Bilder von M.C. Escher (fakultativ)			2.1 2.2

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
Kapitel IV Zahlen multiplizieren und dividieren	Die Schülerinnen und Schüler....	Die Schülerinnen und Schüler....	
1 Brüche vervielfachen und teilen 2 Brüche multiplizieren 3 Durch Brüche dividieren 4 Kommaverschiebung 5 Dezimalzahlen multiplizieren 6 Dezimalzahlen dividieren 7 Rechengesetze – Vorteile beim Rechnen	Arithmetik / Algebra (10) runden Zahlen im Kontext sinnvoll und wenden Überschlag und Probe als Kontrollstrategien an (Ope-7) (14) führen Grundrechenarten in unterschiedlichen Darstellungen sowohl im Kopf als auch schriftlich durch und stellen Rechenschritte nachvollziehbar dar (Ope-1, Ope-4, Kom-5, Kom-8)	Ope-7 führen Lösungs- und Kontrollverfahren sicher und effizient durch Ope-1 wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an Ope-4 führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch Kom-5 verbalisieren eigene Denkprozesse und beschreiben eigene Lösungswege Kom-8 dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar und präsentieren diese	

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV V Daten 1 Relative Häufigkeiten und Diagramme 2 Arithmetisches Mittel und Median 3 Boxplots 4 Daten erheben und sinnvoll auswerten	Die Schülerinnen und Schüler.... Stochastik (1) erheben Daten, fassen sie in Ur- und Strichlisten zusammen und bilden geeignete Klasseneinteilungen (Mod-3) (2) stellen Häufigkeiten in Tabellen und Diagrammen dar auch unter Verwendung digitaler Hilfsmittel (Tabellenkalkulation) (Ope-11) (3) bestimmen, vergleichen und deuten Häufigkeiten und Kenngrößen statistischer Daten (Mod-7, Kom-1) (4) lesen und interpretieren grafische Darstellungen statistischer Erhebungen (Mod-2, Mod-6, Mod-7, Kom-1, Kom-2) (5) diskutieren Vor- und Nachteile grafischer Darstellungen (Mod-8)	Die Schülerinnen und Schüler.... Mod-3 treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor Ope-11 nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (Tabellenkalkulation) Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Kom-1 entnehmen und strukturieren Informationen aus mathematikhaltigen Texten und Darstellungen Mod-2 stellen eigene Fragen zu realen Situationen, die mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten beantwortet werden können Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells Kom-2 recherchieren und bewerten fachbezogene Informationen Mod-8 überprüfen Lösungen auf ihre Plausibilität in realen Situationen	1.2 2.2 2.3

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV VI Strukturen erkennen und beschreiben	Die Schülerinnen und Schüler....	Die Schülerinnen und Schüler....	
1 Strukturen erkennen und fortsetzen 2 Abhängigkeiten mit Termen beschreiben 3 Rechnen mit dem Dreisatz 4 Abhängigkeiten grafisch darstellen	<p>Arithmetik / Algebra</p> <p>(6) nutzen Variablen bei der Formulierung von Rechengesetzen und bei der Beschreibung von einfachen Sachzusammenhängen (Ope-5)</p> <p>(7) setzen Zahlen in Terme mit Variablen ein und berechnen deren Wert (Ope-5)</p> <p>(15) nutzen ganze Zahlen zur Beschreibung von Zuständen und Veränderungen in Sachzusammenhängen und als Koordinaten</p> <p>Funktionen</p> <p>(1) beschreiben den Zusammenhang zwischen zwei Größen mithilfe von Worten, Diagrammen und Tabellen (Ope-3, Ope-6, Mod-1, Mod-4)</p> <p>(2) wenden das Dreisatzverfahren zur Lösung von Sachproblemen an (Ope-5, Ope-8, Mod-6)</p> <p>(3) erkunden Muster in Zahlenfolgen und beschreiben die Gesetzmäßigkeiten in Worten und mit Termen (Pro-1, Pro-3)</p>	<p>Ope-5 arbeiten unter Berücksichtigung mathematischer Regeln und Gesetze mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen</p> <p>Ope-3 übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt</p> <p>Ope-6 führen Darstellungswechsel sicher aus</p> <p>Mod-1 erfassen reale Situationen und beschreiben diese mit Worten und Skizzen</p> <p>Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen</p> <p>Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln</p> <p>Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells</p> <p>Pro-1 geben Problemsituationen in eigenen Worten wieder und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation</p> <p>Pro-3 setzen Muster und Zahlenfolgen fort, beschreiben Beziehungen zwischen Größen und stellen begründete Vermutungen über Zusammenhänge auf</p>	6.2 6.3

2.3 Jahrgangsstufe 7

Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

<p><u>Unterrichtsvorhaben I:</u></p> <p>Thema: <i>Rechnen mit rationalen Zahlen</i></p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Zahlbereichserweiterung: rationale Zahlen • Gesetze und Regeln: Vorzeichenregeln, Rechengesetze für rationale Zahlen <p>Zeitbedarf: 30 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben II:</u></p> <p>Thema: <i>Zuordnungen</i></p> <p>Inhaltsfeld: Funktionen</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Proportionale und antiproportionale Zuordnung: Zuordnungsvorschrift, Graph, Tabelle, Wortform, Quotientengleichheit, Proportionalitätsfaktor, Produktgleichheit, Dreisatz <p>Zeitbedarf: 25 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben III:</u></p> <p>Thema: <i>Prozent und Zinsrechnung</i></p> <p>Inhaltsfeld: Funktionen</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Prozent- und Zinsrechnung: Grundwert, Prozentwert, Prozentsatz, prozentuale Veränderung, Wachstumsfaktor <p>Zeitbedarf: 35 Std</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u></p> <p>Thema: <i>Terme und Gleichungen</i></p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Term und Variable: Variable als Veränderliche, als Platzhalter sowie als Unbekannte, Termumformungen • Lösungsverfahren: algebraische und grafische Lösungsverfahren (lineare Gleichungen, elementare Bruchgleichungen) <p>Zeitbedarf: 30 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben V:</u></p> <p>Thema: <i>Konstruieren und Argumentieren</i></p> <p>Inhaltsfeld: Geometrie</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Geometrische Sätze: Neben-, Scheitel-, Stufen- und Wechselwinkelsatz, Innen-, Außen- und Basiswinkelsatz, Kongruenzsätze • Konstruktion: Dreieck <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u></p> <p>Thema: <i>Wahrscheinlichkeit</i></p> <p>Inhaltsfeld: Stochastik</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Wahrscheinlichkeiten und Zufallsexperimente: ein- und zweistufige Zufallsversuche, Baumdiagramm • Stochastische Regeln: empirisches Gesetz der großen Zahlen, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Pfadregeln • Begriffsbildung: Ereignis, Ergebnis, Wahrscheinlichkeit <p>Zeitbedarf: 14 Std.</p>

Je nach Einteilung der Stundentafel kann das Unterrichtsvorhaben VI in die Klasse 8 verschoben werden; die Inhalte werden dort im Buch wiederholt. *Planungsgrundlage: 160 Ustd. (4 Stunden pro Woche, 40 Wochen), davon 87,5% entsprechen 140 Ustd. pro Schuljahr.*

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV I Rechnen mit rationalen Zahlen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Ganze Zahlen	Arithmetik / Algebra (1) stellen rationale Zahlen auf der Zahlengeraden dar und ordnen sie der Größe nach (Ope-6, Pro-3) (2) geben Gründe und Beispiele für Zahlbereichserweiterungen an (Mod-3, Arg-7) (3) leiten Vorzeichenregeln zur Addition und Subtraktion, sowie Multiplikation und Division anhand von Beispielen ab und nutzen Rechengesetze und Regeln (Ope-8, Arg-5)	Ope-6 führen Darstellungswechsel sicher aus Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln Pro-3 setzen Muster und Zahlenfolgen fort, beschreiben Beziehungen zwischen Größen und stellen begründete Vermutungen über Zusammenhänge auf Mod-3 treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente Arg-7 nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch)	1.1
2 Rationale Zahlen und ihre Anordnung			
3 Addieren und Subtrahieren positiver Zahlen			
4 Addieren und Subtrahieren negativer Zahlen			
5 Multiplizieren und Dividieren rationaler Zahlen			
6 Rechenvorteile nutzen			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV II Zuordnungen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Zuordnungen darstellen	Arithmetik/ Algebra (4) deuten Variablen als Veränderliche zur Beschreibung von Zuordnungen (Mod-4, Mod-5, Pro-4) (5) stellen Terme als Rechenvorschrift von Zuordnungen auf (Mod-4, Mod-6, Kom-1)	Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen Mod-5 ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells Kom-1 entnehmen und strukturieren Informationen aus mathematikhaltigen Texten und Darstellungen Kom-3 erläutern Begriffsinhalte anhand von typischen inner- und außermathematischen Anwendungssituationen. Kom-4 geben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren mit eigenen Worten und mithilfe mathematischer Begriffe wieder, Kom-6 verwenden in angemessenem Umfang die fachgebundene Sprache Kom-7 wählen je nach Situation und Zweck geeignete Darstellungsformen Arg-3 präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur Arg-4 stellen Relationen zwischen Fachbegriffen her (Ober-/Unterbegriff) Ope-11 nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (dynamische Geometriesoftware, Funktionenplotter, Computer-Algebra-Systeme, Multirepräsentationssysteme, Taschenrechner und Tabellenkalkulation)	Taschenrechner wird eingeführt 1.2 2.2
2 Zuordnungen mit Formeln beschreiben	Funktionen (1) charakterisieren Zuordnungen und grenzen diese anhand ihrer Eigenschaften voneinander ab (Arg-3, Arg-4, Kom-1) (2) beschreiben zu gegebenen Zuordnungen passende Sachsituationen (Mod-5, Kom-3)	Mod-5 ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells Kom-1 entnehmen und strukturieren Informationen aus mathematikhaltigen Texten und Darstellungen Kom-3 erläutern Begriffsinhalte anhand von typischen inner- und außermathematischen Anwendungssituationen. Kom-4 geben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren mit eigenen Worten und mithilfe mathematischer Begriffe wieder, Kom-6 verwenden in angemessenem Umfang die fachgebundene Sprache Kom-7 wählen je nach Situation und Zweck geeignete Darstellungsformen Arg-3 präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur Arg-4 stellen Relationen zwischen Fachbegriffen her (Ober-/Unterbegriff)	
3 Proportionale Zuordnungen	(4) stellen Zuordnungen mit eigenen Worten, in Wertetabellen, als Graphen und als Terme dar und nutzen die Darstellungen situationsangemessen (Kom-4, Kom-6, Kom-7) (7) lösen innermathematische und alltagsnahe Probleme mithilfe von Zuordnungen und Dreisatz auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen (Taschenrechner, Tabellenkalkulation und Funktionenplotter und Multirepräsentationssysteme) (Ope-11, Mod-6, Pro-6)	Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells Kom-1 entnehmen und strukturieren Informationen aus mathematikhaltigen Texten und Darstellungen Kom-3 erläutern Begriffsinhalte anhand von typischen inner- und außermathematischen Anwendungssituationen. Kom-4 geben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren mit eigenen Worten und mithilfe mathematischer Begriffe wieder, Kom-6 verwenden in angemessenem Umfang die fachgebundene Sprache Kom-7 wählen je nach Situation und Zweck geeignete Darstellungsformen Arg-3 präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur Arg-4 stellen Relationen zwischen Fachbegriffen her (Ober-/Unterbegriff) Ope-11 nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (dynamische Geometriesoftware, Funktionenplotter, Computer-Algebra-Systeme, Multirepräsentationssysteme, Taschenrechner und Tabellenkalkulation) Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus	
4 Antiproportionale Zuordnungen			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV III Prozent- und Zinsrechnung	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Prozentrechnung	Arithmetik / Algebra (8) ermitteln Exponenten im Rahmen der Zinsrechnung durch systematisches Probieren auch unter Verwendung von Tabellenkalkulationen (Pro-4, Pro-5, Ope-11)	Ope-11 nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (dynamische Geometriesoftware, Funktionenplotter, Computer-Algebra-Systeme, Multi-repräsentationssysteme, Taschenrechner und Tabellenkalkulation) Ope-13 nutzen analoge und digitale Medien und Unterstützung zur Gestaltung mathematischer Prozesse	1.2 1.3
2 Prozentwerte berechnen		Mod-2 stellen eigene Fragen zu realen Situationen, die mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten beantwortet werden können	2.1 2.2
3 Grundwerte berechnen	Funktionen (8) wenden Prozent- und Zinsrechnung auf allgemeine Konsumsituationen an und erstellen dazu anwendungsbezogene Tabellenkalkulationen mit relativen und absoluten Zellbezügen (Ope-11, Ope-13, Mod-2)	Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen Pro-3 setzen Muster und Zahlenfolgen fort, beschreiben Beziehungen zwischen Größen und stellen begründete Vermutungen über Zusammenhänge auf	
4 Überall Prozente		Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-5 nutzen heuristische Strategien und Prinzipien	
5 Zinsen	(9) beschreiben prozentuale Veränderungen mit Wachstumsfaktoren und kombinieren prozentuale Veränderungen (Mod-4, Pro-3)		
6 Zinseszinsen			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV IV Terme und Gleichungen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Terme mit einer Variablen	Arithmetik / Algebra (4) deuten Variablen (...) als Platzhalter in Termen und Rechengesetzen sowie als Unbekannte in Gleichungen (Mod-4, Mod-5, Pro-4) (5) stellen Terme (...) zur Berechnung von Flächeninhalten und Volumina auf (Mod-4, Mod-6, Kom-1) (6) stellen Gleichungen und Ungleichungen zur Formulierung von Bedingungen in Sachsituationen auf (Mod-3, Mod-9) (7) formen Terme, auch Bruchterme, zielgerichtet um und korrigieren fehlerhafte Termumformungen (Ope-5, Pro-9) (9) ermitteln Lösungsmengen linearer Gleichungen (...) sowie von Bruchgleichungen unter Verwendung geeigneter Verfahren und deuten sie im Sachkontext (Ope-8, Mod-7, Pro-6)	Ope-5 arbeiten unter Berücksichtigung mathematischer Regeln und Gesetze mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln Mod-3 treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen Mod-5 ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Mod-9 benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Pro-9 analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern Kom-1 entnehmen und strukturieren Informationen aus mathematikhaltigen Texten und Darstellungen	
2 Terme umformen			
3 Ausmultiplizieren und Ausklammern			
4 Gleichungen aufstellen und lösen			
5 Gleichungen lösen mit Äquivalenzumformungen			
6 Bruchterme und Bruchgleichungen			
7 Problemlösen mit Gleichungen			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV V Konstruieren und Argumentieren	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Winkel an sich schneidenden Geraden	Geometrie (1) nutzen geometrische Sätze zur Winkelbestimmung in ebenen Figuren (Arg-7, Arg-9, Arg-10) (2) begründen die Beweisführung zur Summe der Innenwinkel in einem Dreieck (...) (Pro-10, Arg-8) (3) führen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal durch und nutzen Konstruktionen zur Beantwortung von Fragestellungen (Ope-9, Pro-6, Pro-7)	Ope-9 nutzen mathematische Hilfsmittel (Lineal, Geodreieck und Zirkel) zum Messen, genauen Zeichnen und Konstruieren Ope-12 entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Pro-7 überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen Pro-10 benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen Arg-2 benennen Beispiele für vermutete Zusammenhänge Arg-3 präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente Arg-6 verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten Arg-7 nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch) Arg-8 erläutern vorgegebene Argumentationen und Beweise hinsichtlich ihrer logischen Struktur (Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) Arg-9 beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind Arg-10 ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten. Kom-8 dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar und präsentieren diese Kom-9 greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter	1.2
2 Winkelsummen			
3 Dreiecke konstruieren	(4) formulieren und begründen Aussagen zur Lösbarkeit und Eindeutigkeit von Konstruktionsaufgaben (Arg-2, Arg-3, Arg-5, Arg-6, Arg-7) (5) zeichnen Dreiecke aus gegebenen Winkel- und Seitenmaßen und geben die Abfolge der Konstruktionsschritte mit Fachbegriffen an (Ope-12, Kom-4, Kom-9)		
4 Kongruenz	(7) lösen geometrische Probleme mithilfe von geometrischen Sätzen (Ope-12, Pro-4, Pro-6, Kom-8)		
5 Mit Kongruenzsätzen argumentieren			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
Kapitel VI Daten und Wahrscheinlichkeit	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Wahrscheinlichkeiten schätzen	Stochastik (1) schätzen Wahrscheinlichkeiten auf der Basis von Hypothesen sowie auf der Basis relativer Häufigkeiten langer Versuchsreihen ab (Mod-8, Pro-3) (2) stellen <i>mehrstufige</i> Zufallsexperimente mit Baumdiagrammen dar und entnehmen Wahrscheinlichkeiten aus Baumdiagrammen (Ope-6, Mod-5, Mod-7) (3) bestimmen Wahrscheinlichkeiten mithilfe stochastischer Regeln (Ope-8, Pro-5, Arg-5)	Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen Mod-5 ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Mod-8 überprüfen Lösungen auf ihre Plausibilität in realen Situationen Mod-9 benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung Ope-6 führen Darstellungswechsel sicher aus Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln Pro-3 setzen Muster und Zahlenfolgen fort, beschreiben Beziehungen zwischen Größen und stellen begründete Vermutungen über Zusammenhänge auf Pro-5 nutzen heuristische Strategien und Prinzipien Arg-2 benennen Beispiele für vermutete Zusammenhänge Arg-3 präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente Kom-3 erläutern Begriffsinhalte anhand von typischen inner- und außermathematischen Anwendungssituationen	2.1
2 Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten			
3 Baumdiagramme und Pfadregel	(4) grenzen Laplace-Versuche anhand von Beispielen gegenüber anderen Zufallsversuchen ab (Arg-2, Arg-3, Mod-5, Kom-3) (5) simulieren Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen mit einem stochastischen Modell (Mod-4, Mod-6, Mod-9)		
4 Der richtige Blick auf das Baumdiagramm			

Die Kernlehrpläne betonen, dass eine umfassende mathematische Grundbildung im Mathematikunterricht erst durch die Vernetzung von Inhaltenfeldern und (prozessbezogenen) Kompetenzbereichen erreicht werden kann. Für den Mathematik-unterricht besonders relevante Verknüpfungen werden dabei vom Kernlehrplan vorgegeben.

Dementsprechend sind im neuen Lambacher Schweizer die inhalts- und die prozessbezogenen Kompetenzen innerhalb aller Kapitel eng miteinander verwoben. Die fünf prozessbezogenen Kompetenzbereiche **Operieren**, **Modellieren**, **Problemlösen**, **Argumentieren** und **Kommunizieren** werden im vielfältigen Aufgabenmaterial durchgehend aufgegriffen und geübt.

2.4 Jahrgangsstufe 8

Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

<p><u>Unterrichtsvorhaben I:</u></p> <p>Thema: Wahrscheinlichkeit</p> <p>Inhaltsfeld: Stochastik</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte: Wahrscheinlichkeiten und Zufallsexperimente: ein- und zweistufige Zufallsversuche, Baumdiagramm Stochastische Regeln: empirisches Gesetz der großen Zahlen, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Pfadregeln Begriffsbildung: Ereignis, Ergebnis, Wahrscheinlichkeit</p> <p>Zeitbedarf: 15 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben II:</u></p> <p>Thema: Lineare Funktionen</p> <p>Inhaltsfeld: Funktionen</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte Lineare Funktionen: Funktionsterm, Graph, Tabelle, Wortform, Achsenabschnitte, Steigung, Steigungsdreieck</p> <p>Zeitbedarf: 30 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben III:</u></p> <p>Thema: Terme mit mehreren Variablen</p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt: Term und Variable: Variable als Veränderliche, als Platzhalter sowie als Unbekannte; Termumformungen Gesetze und Regeln: Binomische Formeln</p> <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u></p> <p>Thema: Flächen</p> <p>Inhaltsfeld: Geometrie</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte: Umfang und Flächeninhalt: Dreieck, Viereck, zusammenge setzte Figuren, Höhe und Grundseite</p> <p>Zeitbedarf: 12 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben V:</u></p> <p>Thema: Lineare Gleichungssysteme</p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt: Lösungsverfahren: algebraische und grafische Lösungsverfahren (lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen)</p> <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u></p> <p>Thema: Kreise und Dreiecke</p> <p>Inhaltsfeld: Geometrie</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt: Geometrische Sätze: Satz des Thales Konstruktion: Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende, Inkreis, Umkreis, Thaleskreis und Schwerpunkt</p> <p>Zeitbedarf: 12 Std.</p>

Je nach Einteilung der Stundentafel kann das Unterrichtsvorhaben I schon in Klasse 7 unterrichtet werden; die Inhalte werden dort im Buch wiederholt.

Je nach Einteilung der Stundentafel kann das Unterrichtsvorhaben V erst in Klasse 9 unterrichtet werden.

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV I Daten und Wahrscheinlichkeit (Kap. I, Band 8)	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Wahrscheinlichkeiten schätzen	Stochastik (1) schätzen Wahrscheinlichkeiten auf der Basis von Hypothesen sowie auf der Basis relativer Häufigkeiten langer Versuchsreihen ab (Mod-8, Pro-3) (2) stellen Zufallsexperimente mit Baumdiagrammen dar und entnehmen Wahrscheinlichkeiten aus Baumdiagrammen (Ope-6, Mod-5, Mod-7) (3) bestimmen Wahrscheinlichkeiten mithilfe stochastischer Regeln (Ope-8, Pro-5, Arg-5) (4) grenzen Laplace-Versuche anhand von Beispielen gegenüber anderen Zufallsversuchen ab (Arg-2, Arg-3, Mod-5, Kom-3) (5) simulieren Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen mit einem stochastischen Modell (Mod-4, Mod-6, Mod-9)	Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen Mod-5 ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Mod-8 überprüfen Lösungen auf ihre Plausibilität in realen Situationen Mod-9 benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung Ope-6 führen Darstellungswechsel sicher aus Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln Pro-3 setzen Muster und Zahlenfolgen fort, beschreiben Beziehungen zwischen Größen und stellen begründete Vermutungen über Zusammenhänge auf Pro-5 nutzen heuristische Strategien und Prinzipien Arg-2 benennen Beispiele für vermutete Zusammenhänge Arg-3 präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente Kom-3 erläutern Begriffsinhalte anhand von typischen inner- und außermathematischen Anwendungssituationen	2.2 2.3 4.2 6.3
2 Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten			
3 Baumdiagramme und Pfadregel			
4 Der richtige Blick auf das Baumdiagramm			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV II Lineare Funktionen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
	Funktionen (3) charakterisieren Funktionen als Klasse eindeutiger Zuordnungen (Arg-4, Kom-3) (4) stellen Funktionen mit eigenen Worten, in Wertetabellen, als Graphen und als Terme dar und nutzen die Darstellungen situationsangemessen (Kom-4, Kom-6, Kom-7) (5) beschreiben den Einfluss der Parameter auf den Graphen einer linearen Funktion mithilfe von Fachbegriffen (Arg-1, Arg-3, Arg-7) (6) interpretieren die Parameter eines linearen Funktionsterms unter Beachtung der Einheiten in Sachsituationen (Mod-8, Arg-5) (7) lösen innermathematische und alltagsnahe Probleme mithilfe von (...) Funktionen auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen (Taschenrechner, Tabellenkalkulation und Funktionenplotter und Multirepräsentationssysteme) (Ope-11, Mod-6, Pro-6)	Ope-11 nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (dynamische Geometriesoftware, Funktionenplotter, Computer-Algebra-Systeme, Multirepräsentationssysteme, Taschenrechner und Tabellenkalkulation) Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells Mod-8 überprüfen Lösungen auf ihre Plausibilität in realen Situationen Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Arg-1 stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf Arg-3 präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur Arg-4 stellen Relationen zwischen Fachbegriffen her (Ober-/Unterbegriff) Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente Arg-7 nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch) Kom-1 entnehmen und strukturieren Informationen aus mathematikhaltigen Texten und Darstellungen Kom-3 erläutern Begriffsinhalte anhand von typischen inner- und außermathematischen Anwendungssituationen. Kom-4 geben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren mit eigenen Worten und mithilfe mathematischer Begriffe wieder, Kom-6 verwenden in angemessenem Umfang die fachgebundene Sprache Kom-7 wählen je nach Situation und Zweck geeignete Darstellungsformen	1.2 2.1 2.2 2.3 4.1 6.2

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV III Terme mit mehreren Variablen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
Terme mit mehreren Variablen	Arithmetik / Algebra (3) (...) nutzen Rechengesetze und Regeln (Ope-8, Arg-5) (4) deuten Variablen (...) als Platzhalter in Termen und Rechengesetzen sowie als Unbekannte in Gleichungen (...) (Mod-4, Mod-5, Pro-4) (5) stellen Terme (...) und zur Berechnung von Flächenhalten und Volumina auf (Mod-4, Mod-6, Kom-1) (7) formen Terme, auch Bruchterme, zielgerichtet um und korrigieren fehlerhafte Termumformungen (Ope-5, Pro-9)	Ope-5 arbeiten unter Berücksichtigung mathematischer Regeln und Gesetze mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen Mod-5 ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-9 analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern Kom-1 entnehmen und strukturieren Informationen aus mathematikhaltigen Texten und Darstellungen	6.2
Binomische Formeln			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV IV Flächen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
Flächeninhalte von Dreiecken und Parallelogrammen	Arithmetik/ Algebra (5) stellen Terme (...) zur Berechnung von Flächeninhalten und Volumina auf (Mod-4, Mod-6, Kom-1) Geometrie (6) erkunden geometrische Zusammenhänge (...) Abhängigkeit des Flächeninhalts von Seitenlängen) mithilfe dynamischer Geometriesoftware (Ope-13, Pro-5, Pro-6) (7) lösen geometrische Probleme mithilfe von geometrischen Sätzen (Ope-12, Pro-4, Pro-6, Kom-8) (8) berechnen Flächeninhalte und entwickeln Terme zur Berechnung von Flächeninhalten ebener Figuren (Ope-5, Pro-5, Pro-8, Pro-10)	Ope-5 arbeiten unter Berücksichtigung mathematischer Regeln und Gesetze mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen Ope-12 entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus Ope-13 nutzen analoge und digitale Medien und Unterstützung zur Gestaltung mathematischer Prozesse Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-5 nutzen heuristische Strategien und Prinzipien Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Pro-8 vergleichen verschiedene Lösungswege im Hinblick auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede und beurteilen deren Effizienz Pro-10 benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen Kom-1 entnehmen und strukturieren Informationen aus mathematikhaltigen Texten und Darstellungen Kom-8 dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar und präsentieren diese	1.2
Flächeninhalte zusammengesetzter Figuren			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV V Lineare Gleichungssysteme	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
	Arithmetik / Algebra (4) deuten Variablen (...) als Platzhalter in Termen und Rechengesetzen sowie als Unbekannte in Gleichungen und Gleichungssystemen (Mod-4, Mod-5, Pro-4) (9) ermitteln Lösungsmengen (...) linearer Gleichungssysteme (...) unter Verwendung geeigneter Verfahren und deuten sie im Sachkontext (Ope-8, Mod-7, Pro-6) (10) wählen algebraische Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme zielgerichtet aus und vergleichen die Effizienz unterschiedlicher Lösungswege (Pro-4, Pro-8, Pro-10)	Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen Mod-5 ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Pro-8 vergleichen verschiedene Lösungswege im Hinblick auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede und beurteilen deren Effizienz Pro-10 benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen	1.2 4.1 6.2

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV VI Kreise und Dreiecke	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
Seitenhalbierende, Schwerpunkt eines Dreiecks	Geometrie (2) begründen die Beweisführung (...) zum Satz des Thales (Pro-10, Arg-8) (3) führen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal durch und nutzen Konstruktionen zur Beantwortung von Fragestellungen (Ope-9, Pro-6, Pro-7)	Ope-9 nutzen mathematische Hilfsmittel (Lineal, Geodreieck und Zirkel) zum Messen, genauen Zeichnen und Konstruieren Ope-12 entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus Ope-13 nutzen analoge und digitale Medien und Unterstützung zur Gestaltung mathematischer Prozesse Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-5 nutzen heuristische Strategien und Prinzipien Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Pro-7 überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen Pro-10 benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen Arg-8 erläutern vorgegebene Argumentationen und Beweise hinsichtlich ihrer logischen Struktur (Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) Kom-8 dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar und präsentieren diese	1.2
Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende	(6) erkunden geometrische Zusammenhänge (Ortslinien von Schnittpunkten, Abhängigkeit des Flächeninhalts von Seitenlängen) mithilfe dynamischer Geometriesoftware (Ope-13, Pro-5, Pro-6)		
In- und Umkreis	(7) lösen geometrische Probleme mithilfe von geometrischen Sätzen (Ope-12, Pro-4, Pro-6, Kom-8)		
Satz des Thales			

Die Kernlehrpläne betonen, dass eine umfassende mathematische Grundbildung im Mathematikunterricht erst durch die Vernetzung von Inhaltenfeldern und (prozessbezogenen) Kompetenzbereichen erreicht werden kann. Für den Mathematik-unterricht besonders relevante Verknüpfungen werden dabei vom Kernlehrplan vorgegeben.

Dementsprechend sind im neuen Lambacher Schweizer die inhalts- und die prozessbezogenen Kompetenzen innerhalb aller Kapitel eng miteinander verwoben. Die fünf prozessbezogenen Kompetenzbereiche **Operieren**, **Modellieren**, **Problemlösen**, **Argumentieren** und **Kommunizieren** werden im vielfältigen Aufgabenmaterial durchgehend aufgegriffen und geübt.

2.5 Jahrgangsstufe 9

Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

<p><u>Unterrichtsvorhaben I:</u></p> <p>Thema: Reelle Zahlen</p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Zahlbereichserweiterung: reelle Zahlen • Begriffsbildung: Wurzeln • Gesetze und Regeln: Wurzelgesetze • Lösungsverfahren und Algorithmen: algorithmische Näherungsverfahren, <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben II:</u></p> <p>Thema: Quadratische Funktionen</p> <p>Inhaltsfeld: Funktionen</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • quadratische Funktionen: Term (Normalform, Scheitelpunktform, faktorisierte Form), Graph, Tabelle, Scheitelpunkt, Symmetrie, Öffnung, Nullstellen und y- Achsenabschnitt, Transformation der Normalparabel, Extremwertprobleme <p>Zeitbedarf: 22 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben III:</u></p> <p>Thema: Kreise, Prismen und Zylinder</p> <p>Inhaltsfeld: Geometrie</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Kreis: Umfang und Flächeninhalt (Kreis, Kreisbogen, Kreissektor), Tangente • Körper: Zylinder, Prisma (Oberflächeninhalt und Volumen) <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u></p> <p>Thema: Potenzen und Potenzgesetze</p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Begriffsbildung: Potenzen • Gesetze und Regeln: Potenzgesetze <p>Zeitbedarf: 15 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben V:</u></p> <p>Thema: Der Satz des Pythagoras und Berechnungen in Körpern</p> <p>Inhaltsfeld: Geometrie</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • geometrische Sätze: Satz des Pythagoras • Körper: Pyramide, Kegel und Kugel (Oberflächeninhalt und Volumen), <p>Zeitbedarf: 12 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u></p> <p>Thema: Daten und Wahrscheinlichkeit</p> <p>Inhaltsfeld: Stochastik</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • statistische Daten: Erhebung, Diagramm, Manipulation • Wahrscheinlichkeiten und Zufallsexperimente: bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit, Vierfeldertafel, Baumdiagramme, Pfadregeln <p>Zeitbedarf: 13 Std.</p>

Je nach Einteilung der Stundentafel kann das Unterrichtsvorhaben VI in die Klasse 10 verschoben werden; die Inhalte werden dort im Buch wiederholt.

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV I Reelle Zahlen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Quadratwurzeln	Arithmetik / Algebra (2) unterscheiden rationale und irrationale Zahlen und geben Beispiele für irrationale Zahlen an (Arg-2, Kom-3) (6) nutzen und beschreiben ein algorithmisches Verfahren, um Quadratwurzeln näherungsweise zu bestimmen (Ope-8, Pro-5, Kom-4) (7) berechnen Quadratwurzeln mithilfe der Wurzelgesetze auch ohne digitale Werkzeuge (Ope-1, Ope-5) (9) wenden das Radizieren als Umkehrung des Potenzierens an (Ope-4)	Arg-2 benennen Beispiele für vermutete Zusammenhänge Kom-3 erläutern Begriffsinhalte anhand von typischen inner- und außer-mathematischen Anwendungssituationen. Kom-4 geben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren mit eigenen Worten und mithilfe mathematischer Begriffe wieder Pro-5 nutzen heuristische Strategien und Prinzipien Ope-1 wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an Ope-5 arbeiten unter Berücksichtigung mathematischer Regeln und Ge-setze mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen Ope-4 führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines in-haltlichen Verständnisses durch Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorith-men und Regeln	6.2 6.3
2 Wurzeln näherungsweise bestimmen			
3 Irrationale Zahlen			
4 Geschickt mit Wurzeln rechnen			
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen Rückblick Test			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV II Quadratische Funktionen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Wiederholung: Lineare Funktionen	Funktionen (1) stellen Funktionen mit eigenen Worten, in Wertetabellen, als Graphen und als Terme dar (Kom-4, Kom-6, Kom-7) (2) verwenden aus Graph, Wertetabelle und Term ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Bearbeiten mathematischer Fragestellungen (Pro-2, Pro-3, Arg-5)	Kom-4 geben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren mit eigenen Worten und mithilfe mathematischer Begriffe wieder Kom-6 verwenden in angemessenem Umfang die fachgebundene Sprache Kom-7 wählen je nach Situation und Zweck geeignete Darstellungsformen Kom-9 greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter Kom-10 vergleichen und beurteilen Ausarbeitungen und Präsentationen hinsichtlich ihrer fachlichen Richtigkeit, Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität Pro-1 geben Problemsituationen in eigenen Worten wieder und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation Pro-2 wählen geeignete heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) Pro-3 setzen Muster und Zahlenfolgen fort, beschreiben Beziehungen zwischen Größen und stellen begründete Vermutungen über Zusammenhänge auf Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Arg-1 stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf Arg-3 präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur Arg-4 stellen Relationen zwischen Fachbegriffen her (Ober-/Unterbegriff) Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente Arg-6 verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten Arg-7 nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch)	1.2 6.2 6.3
2 Quadratische Funktionen vom Typ $f(x) = ax^2$	(4) bestimmen anhand des Graphen einer Funktion die Parameter eines Funktionsterms dieser Funktion (Arg-5, Arg-6, Arg-7) (5) erklären den Einfluss der Parameter eines Funktionsterms auf den Graphen der Funktion (Ausnahme bei quadratischen Funktionen in der Normalform: nur Streckfaktor und y-Achsenabschnitt) (Arg-3, Kom-9, Kom-10) (6) erkunden und systematisieren mithilfe dynamischer Geometriesoftware den Einfluss der Parameter von Funktionen (Pro-1, Pro-2, Pro-4, Pro-6, Ope-13)		
3 Scheitelpunktform quadratischer Funktionen			

UV II Quadratische Funktionen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	MKR
4 Normalform und quadratische Ergänzung	(7) deuten Parameter und Eigenschaften einer Funktion in Anwendungssituationen (Mod-1, Mod-5, Mod-6, Mod-7, Mod-9) (8) formen Funktionsterme quadratischer Funktionen um und nutzen verschiedene Formen der Termdarstellung situationsabhängig (Ope-5, Pro-6, Kom-7) (11) identifizieren funktionale Zusammenhänge in Messreihen mit digitalen Hilfsmitteln (Arg-1, Arg-4, Ope-11, Ope-13)	Mod-1 erfassen reale Situationen und beschreiben diese mit Worten und Skizzen Mod-5 ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Mod-9 benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung Ope-5 arbeiten unter Berücksichtigung mathematischer Regeln und Gesetze mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen Ope-11 nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (dynamische Geometriesoftware, Funktionenplotter, Computer-Algebra-Systeme, Multirepräsentationssysteme, Taschenrechner und Tabellenkalkulation)	
5 Aufstellen von Funktionsgleichungen		Ope-13 nutzen analoge und digitale Medien und Unterstützung zur Gestaltung mathematischer Prozesse	
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen Rückblick Test			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV III Kreise, Prismen und Zylinder	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Kreisumfang und Kreisfläche	Geometrie (3) berechnen Längen und Flächeninhalte an Kreisen und Kreissektoren (Ope-8; Ope-9) (4) erläutern eine Idee zur Herleitung der Formeln für Flächeninhalt und Umfang eines Kreises durch Näherungsverfahren (Arg-8, Kom-4)	Kom-4 geben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren mit eigenen Worten und mithilfe mathematischer Begriffe wieder Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln Ope-9 nutzen mathematische Hilfsmittel (Lineal, Geodreieck und Zirkel) zum Messen, genauen Zeichnen und Konstruieren Ope-10 nutzen Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlung) zur Informationsrecherche Pro-5 nutzen heuristische Strategien und Prinzipien Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Pro-7 überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen Pro-10 benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente Arg-6 verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten Arg-7 nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch) Arg-8 erläutern vorgegebene Argumentationen und Beweise hinsichtlich ihrer logischen Struktur (Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Mod-8 überprüfen Lösungen auf ihre Plausibilität in realen Situationen	1.2
2 Kreisteile	(5) schätzen und berechnen Oberflächeninhalt und Volumen von Körpern, Teilkörpern sowie zusammengesetzten Körpern (Ope-10, Pro-5, Pro-7)		
3 Flächen bei Prismen und Zylindern	(6) begründen Gleichheit von Volumina mit dem Prinzip von Cavalieri (Arg-5, Arg-6, Arg-7)		
4 Prismen und Zylinder – Volumen	(9) berechnen Größen mithilfe von (...), geometrischen Sätzen (...) (Pro-6, Pro-10, Ope-9) (10) ermitteln Maßangaben in Sachsituationen, nutzen diese für geometrische Berechnungen und bewerten die Ergebnisse sowie die Vorgehensweise (Mod-7, Mod-8, Ope-10)		
5 Das Prinzip von Cavalieri			
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen Rückblick Test			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV IV Potenzen und Potenzgesetze	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	Arithmetik / Algebra (1) stellen Zahlen in Zehnerpotenzschreibweise dar (Ope-1, Ope-6) (3) vereinfachen Terme, bei denen die Potenzgesetze unmittelbar anzuwenden sind (Ope-5, Kom-7) (4) wechseln zwischen Bruchdarstellung und Potenzschreibweise (Ope-1, Ope-6) (5) wechseln zwischen Wurzel- und Potenzschreibweise (Ope-1, Ope-6)	Ope-1 wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an Ope-6 führen Darstellungswechsel sicher aus Ope-5 arbeiten unter Berücksichtigung mathematischer Regeln und Gesetze mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen Kom-7 wählen je nach Situation und Zweck geeignete Darstellungsformen	
2 Zahlen mit Zehnerpotenzen schreiben			
3 Potenzen mit gleicher Basis			
4 Potenzen mit gleichen Exponenten			
5 Potenzieren von Potenzen			
6 Potenzen mit rationalen Exponenten			
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen Rückblick Test			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
---------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	-----

UV V Der Satz des Pythagoras und Körper	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Der Satz des Pythagoras	Geometrie (1) beweisen Satz des Pythagoras (Arg-7, Arg-9, Arg-10), (5) schätzen und berechnen Oberflächeninhalt (...) von Körpern, Teilkörpern sowie zusammengesetzten Körpern (Ope-10, Pro-5, Pro-7) (9) berechnen Größen mithilfe von (...) geometrischen Sätzen (...) (Pro-6, Pro-10, Ope-9) (10) ermitteln Maßangaben in Sachsituationen, nutzen diese für geometrische Berechnungen und bewerten die Ergebnisse sowie die Vorgehensweise (Mod-7, Mod-8, Ope-10)	Arg-7 nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch) Arg-9 beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind Arg-10 ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten. Ope-9 nutzen mathematische Hilfsmittel (Lineal, Geodreieck und Zirkel) zum Messen, genauen Zeichnen und Konstruieren Ope-10 nutzen Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlung) zur Informationsrecherche Pro-5 nutzen heuristische Strategien und Prinzipien Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Pro-7 überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen Pro-10 benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Mod-8 überprüfen Lösungen auf ihre Plausibilität in realen Situationen	
2 Pythagoras in Figuren und Körpern			
3 Pyramiden			
4 Kegel			
5 Kugeln			
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen Rückblick Test			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV VI Daten und Wahrscheinlichkeit	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Statistiken verstehen und beurteilen	Stochastik (1) planen statistische Datenerhebungen und nutzen zur Erfassung und Auswertung digitale Werkzeuge (Ope-11, Kom-8) (2) analysieren grafische Darstellungen statistischer Erhebungen kritisch und erkennen Manipulationen (Arg-9, Kom-10, Kom-11) (3) verwenden zweistufige Zufallsversuche zur Darstellung zufälliger Erscheinungen in alltäglichen Situationen (Mod-4)	Ope-11 nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (dynamische Geometriesoftware, Funktionenplotter, Computer-Algebra-Systeme, Multirepräsentationssysteme, Taschenrechner und Tabellenkalkulation) Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln Kom-8 dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar und präsentieren diese Kom-10 vergleichen und beurteilen Ausarbeitungen und Präsentationen hinsichtlich ihrer fachlichen Richtigkeit, Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität Kom-11 führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei. Arg-9 beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Mod-8 überprüfen Lösungen auf ihre Plausibilität in realen Situationen Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-5 nutzen heuristische Strategien und Prinzipien Pro-7 überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen	1.2 3.1 3.3 4.1 4.2 6.1
2 Vierfeldertafeln und Baumdiagramme			
3 Bedingte Wahrscheinlichkeit			
4 Stochastische Unabhängigkeit			
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen Rückblick Test	(5) berechnen Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafel und deuten diese im Sachzusammenhang (Ope-8, Mod-7, Mod-8) (6) interpretieren und beurteilen Daten und statistische Aussagen in authentischen Texten (Mod-7, Mod-8, Arg-9, Kom-10, Kom-11)		

Die Kernlehrpläne betonen, dass eine umfassende mathematische Grundbildung im Mathematikunterricht erst durch die Vernetzung von Inhaltenfeldern und (prozessbezogenen) Kompetenzbereichen erreicht werden kann. Für den Mathematik-unterricht besonders relevante Verknüpfungen werden dabei vom Kernlehrplan vorgegeben.

Dementsprechend sind im neuen Lambacher Schweizer die inhalts- und die prozessbezogenen Kompetenzen innerhalb aller Kapitel eng miteinander verwoben. Die fünf prozessbezogenen Kompetenzbereiche **Operieren**, **Modellieren**, **Problemlösen**, **Argumentieren** und **Kommunizieren** werden im vielfältigen Aufgabenmaterial durchgehend aufgegriffen und geübt.

2.6 Jahrgangsstufe 10

Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

<p><u>Unterrichtsvorhaben I:</u></p> <p>Thema: <i>Daten und Wahrscheinlichkeit</i></p> <p>Inhaltsfeld: Stochastik</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • statistische Daten: Erhebung, Diagramm, Manipulation • Wahrscheinlichkeiten und Zufallsexperimente: bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit, Vierfeldertafel, Baumdiagramme, Pfadregeln <p>Zeitbedarf: 13 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben II:</u></p> <p>Thema: <i>Quadratische Funktionen und Gleichungen</i></p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra; Funktionen</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen (quadratische Ergänzung, p-q-Formel, Satz von Vieta) • quadratische Funktionen: Term (Normalform, Scheitelpunktform, faktorisierte Form), Graph, Tabelle, Scheitelpunkt, Symmetrie, Öffnung, Nullstellen und y- Achsenabschnitt, Transformation der Normalparabel, Extremwertprobleme <p>Zeitbedarf: 23 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben III:</u></p> <p>Thema: <i>Ähnlichkeit</i></p> <p>Inhaltsfeld: Geometrie</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Abbildung/Lagebeziehung: zentrische Streckungen, Ähnlichkeit <p>Zeitbedarf: 12 Std.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u></p> <p>Thema: <i>Exponentialfunktionen</i></p> <p>Inhaltsfeld: Arithmetik / Algebra; Funktionen</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>Lösungsverfahren für Exponentialgleichungen der Form $b^x = c$ (systematisches Probieren, Logarithmieren) exponentielle Funktionen: $f(x) = a \cdot q^x$, $a > 0$, $q > 0$, Term, Graph, Tabelle, Wortform, Wachstum (Anfangswert, Wachstumsfaktor und -rate, Verdopplungs- bzw. Halbwertszeit, langfristige Entwicklung)</p> <p>Zeitbedarf: 22 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben V:</u></p> <p>Thema: <i>Trigonometrie</i></p> <p>Inhaltsfeld: Geometrie</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <p>geometrische Sätze: Kosinussatz Trigonometrie: Sinus, Kosinus, Tangens</p> <p>Zeitbedarf: 18 Std.</p>	<p><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u></p> <p>Thema: <i>Trigonometrische Funktionen</i></p> <p>Inhaltsfeld: Funktionen</p> <p>Inhaltlicher Schwerpunkt:</p> <p>Sinusfunktionen: $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$, Term, Graph, Grad- und Bogenmaß, zeitlich periodische Vorgänge der Form : $f(x) = a \cdot \sin(t \cdot 2\pi/T)$ Amplitude a, Periode T</p> <p>Zeitbedarf: 20 Std.</p>

Je nach Einteilung der Stundentafel kann das Unterrichtsvorhaben I schon in Klasse 9 unterrichtet werden; die Inhalte werden dort im Buch wiederholt.

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV I Daten und Wahrscheinlichkeit (Wiederholung Kap. VI, Band 9)	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Statistiken verstehen und beurteilen	Stochastik (1) planen statistische Datenerhebungen und nutzen zur Erfassung und Auswertung digitale Werkzeuge (Ope-11, Kom-8) (2) analysieren grafische Darstellungen statistischer Erhebungen kritisch und erkennen Manipulationen (Arg-9, Kom-10, Kom-11)	Ope-11 nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (dynamische Geometriesoftware, Funktionenplotter, Computer-Algebra-Systeme, Multirepräsentationssysteme, Taschenrechner und Tabellenkalkulation) Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln Kom-8 dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar und präsentieren diese	1.2
2 Vierfeldertafeln und Baumdiagramme	(3) verwenden zweistufige Zufallsversuche zur Darstellung zufälliger Erscheinungen in alltäglichen Situationen (Mod-4) (4) führen in konkreten Situationen kombinatorische Überlegungen durch, um die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten zu bestimmen	Kom-10 vergleichen und beurteilen Ausarbeitungen und Präsentationen hinsichtlich ihrer fachlichen Richtigkeit, Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität Kom-11 führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei.	
3 Bedingte Wahrscheinlichkeit	(Pro-4, Pro-5, Pro-7) (5) berechnen Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafel und deuten diese im Sachzusammenhang (Ope-8, Mod-7, Mod-8)	Arg-9 beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung	
4 Stochastische Unabhängigkeit	(6) interpretieren und beurteilen Daten und statistische Aussagen in authentischen Texten (Mod-7, Mod-8, Arg-9, Kom-10, Kom-11)	Mod-8 überprüfen Lösungen auf ihre Plausibilität in realen Situationen Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-5 nutzen heuristische Strategien und Prinzipien Pro-7 überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen	
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen Rückblick Test			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV II Quadratische Funktionen und Gleichungen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Wiederholung: Quadratische Funktionen	Funktionen (1) stellen Funktionen mit eigenen Worten, in Wertetabellen, als Graphen und als Terme dar (Kom-4, Kom-6, Kom-7)		1.2
2 Quadratische Gleichungen grafisch lösen	(2) verwenden aus Graph, Wertetabelle und Term ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Bearbeiten mathematischer Fragestellungen (Pro-2, Pro-3, Arg-5)		
3 Lösen einfacher quadratischer Gleichungen	(4) bestimmen anhand des Graphen einer Funktion die Parameter eines Funktionsterms dieser Funktion (Arg-5, Arg-6, Arg-7) (5) erklären den Einfluss der Parameter eines Funktionsterms auf den Graphen der Funktion (Ausnahme bei quadratischen Funktionen in der Normalform: nur Streckfaktor und y-Achsenabschnitt) (Arg-3, Kom-9, Kom-10) (6) erkunden und systematisieren mithilfe dynamischer Geometriesoftware den Einfluss der Parameter von Funktionen (Pro-1, Pro-2, Pro-4, Pro-6, Ope-13)	Kom-4 geben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren mit eigenen Worten und mithilfe mathematischer Begriffe wieder Kom-6 verwenden in angemessenem Umfang die fachgebundene Sprache Kom-7 wählen je nach Situation und Zweck geeignete Darstellungsformen Kom-9 greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter Kom-10 vergleichen und beurteilen Ausarbeitungen und Präsentationen hinsichtlich ihrer fachlichen Richtigkeit, Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität Pro-1 geben Problemsituationen in eigenen Worten wieder und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation Pro-2 wählen geeignete heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) Pro-3 setzen Muster und Zahlenfolgen fort, beschreiben Beziehungen zwischen Größen und stellen begründete Vermutungen über Zusammenhänge auf Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Arg-3 präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente Arg-6 verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten Arg-7 nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch) Ope-13 nutzen analoge und digitale Medien und Unterstützung zur Gestaltung mathematischer Prozesse	

UV II Quadratische Funktionen und Gleichungen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	MKR
4 Linearfaktorzerlegung	Funktionen (7) deuten Parameter und Eigenschaften einer Funktion in Anwendungssituationen (Mod-1, Mod-5, Mod-6, Mod-7, Mod-9) (8) formen Funktionsterme quadratischer Funktionen um und nutzen verschiedene Formen der Termdarstellung situationsabhängig (Ope-5, Pro-6, Kom-7) (9) berechnen Nullstellen quadratischer Funktionen durch geeignete Verfahren	Mod-1 erfassen reale Situationen und beschreiben diese mit Worten und Skizzen Mod-5 ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Mod-8 überprüfen Lösungen auf ihre Plausibilität in realen Situationen Mod-9 benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung	1.2
5 Lösungsformel für quadratische Gleichungen	(Pro-4, Pro-8, Ope-7) (11) identifizieren funktionale Zusammenhänge in Messreihen mit digitalen Hilfsmitteln (Arg-1, Arg-4, Ope-11, Ope-13) Arithmetik / Algebra (8) wählen Verfahren zum Lösen quadratischer Gleichungen begründet aus, vergleichen deren Effizienz und bestimmen die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung auch ohne Hilfsmittel (Pro-4, Pro-8, Ope-7)	Ope-5 arbeiten unter Berücksichtigung mathematischer Regeln und Gesetze mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen Ope-7 führen Lösungs- und Kontrollverfahren sicher und effizient durch Ope-11 nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (dynamische Geometriesoftware, Funktionenplotter, Computer-Algebra-Systeme, Multirepräsentationssysteme, Taschenrechner und Tabellenkalkulation) Ope-13 nutzen analoge und digitale Medien und Unterstützung zur Gestaltung mathematischer Prozesse Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne	
6 Probleme systematisch lösen	(11) wenden ihre Kenntnisse über quadratische Gleichungen (...) zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme an und deuten Ergebnisse in Kontexten (Mod-7, Mod-8, Mod-9, Pro-4)	Pro-8 zielgerichtet aus Kom-7 vergleichen verschiedene Lösungswege im Hinblick auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede und beurteilen deren Effizienz Arg-1 wählen je nach Situation und Zweck geeignete Darstellungsformen Arg-1 stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf	
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen Rückblick Test		Arg-4 stellen Relationen zwischen Fachbegriffen her (Ober-/Unterbegriff)	

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV III Ähnlichkeit	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Zentrische Streckung	Geometrie (2) erzeugen ähnliche Figuren durch zentrische Streckungen und ermitteln aus gegebenen Abbildungen Streckzentrum und Streckfaktor (Ope-8, Ope-9)	Ope-8 nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren, Algorithmen und Regeln Ope-9 nutzen mathematische Hilfsmittel (Lineal, Geodreieck und Zirkel) zum Messen, genauen Zeichnen und Konstruieren Ope-10 nutzen Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlung) zur Informationsrecherche	1.2 1.3 2.1 2.2
2 Ähnlichkeit	(9) berechnen Größen mithilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen (...) (Pro-6, Pro-10, Ope-9) (10) ermitteln Maßangaben in Sachsituationen, nutzen diese für geometrische Berechnungen und bewerten die Ergebnisse sowie die Vorgehensweise (Mod-7, Mod-8, Ope-10)	Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Pro-10 benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Mod-8 überprüfen Lösungen auf ihre Plausibilität in realen Situationen	
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen Rückblick Test			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV IV Exponentialfunktionen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Exponentielles Wachstum	Arithmetik / Algebra <p>(10) lösen Exponentialgleichungen $b^x = c$ näherungsweise durch Probieren, durch Logarithmieren sowie mit digitalen Mathematikwerkzeugen (Pro-5, Ope-12)</p> <p>(11) wenden ihre Kenntnisse über (...) Exponentialgleichungen zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme an und deuten Ergebnisse in Kontexten (Mod-7, Mod-8, Mod-9, Pro-4)</p> Funktionen <p>(1) stellen Funktionen mit eigenen Worten, in Wertetabellen, als Graphen und als Terme dar (Kom-4, Kom-6, Kom-7)</p> <p>(2) verwenden aus Graph, Wertetabelle und Term ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Bearbeiten mathematischer Fragestellungen (Pro-2, Pro-3, Arg-5)</p> <p>(3) charakterisieren Funktionsklassen und grenzen diese anhand ihrer Eigenschaften ab (Arg-6, Arg-7, Kom-1)</p>	<p>Ope-12 entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus</p> <p>Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung</p> <p>Mod-8 überprüfen Lösungen auf ihre Plausibilität in realen Situationen</p> <p>Mod-9 benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung</p> <p>Kom-1 entnehmen und strukturieren Informationen aus mathematikhaltigen Texten und Darstellungen</p> <p>Kom-4 geben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren mit eigenen Worten und mithilfe mathematischer Begriffe wieder</p> <p>Kom-6 verwenden in angemessenem Umfang die fachgebundene Sprache</p> <p>Kom-7 wählen je nach Situation und Zweck geeignete Darstellungsformen</p> <p>Pro-2 wählen geeignete heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren)</p> <p>Pro-3 setzen Muster und Zahlenfolgen fort, beschreiben Beziehungen zwischen Größen und stellen begründete Vermutungen über Zusammenhänge auf</p> <p>Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus</p> <p>Pro-5 nutzen heuristische Strategien und Prinzipien</p> <p>Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente</p> <p>Arg-6 verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten</p> <p>Arg-7 nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch)</p>	
2 Exponentielle Wachstumsmodelle			

UV IV Exponentialfunktionen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
3 Exponentialgleichungen und Logarithmen	Funktionen <ul style="list-style-type: none"> (4) bestimmen anhand des Graphen einer Funktion die Parameter eines Funktionsterms dieser Funktion (Arg-5, Arg-6, Arg-7) (5) erklären den Einfluss der Parameter eines Funktionsterms auf den Graphen der Funktion (Arg-3, Kom-9, Kom-10) (6) erkunden und systematisieren mithilfe dynamischer Geometriesoftware den Einfluss der Parameter von Funktionen (Pro-1, Pro-2, Pro-4, Pro-6, Ope-13) (7) deuten Parameter und Eigenschaften einer Funktion in Anwendungssituationen (Mod-1, Mod-5, Mod-6, Mod-7, Mod-9) 	<ul style="list-style-type: none"> Arg-1 stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf Arg-3 präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur Arg-4 stellen Relationen zwischen Fachbegriffen her (Ober-/Unterbegriff) Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente Arg-6 verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten Arg-7 nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch) Kom-9 greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter Kom-10 vergleichen und beurteilen Ausarbeitungen und Präsentationen hinsichtlich ihrer fachlichen Richtigkeit, Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität 	1.2
4 Vergleich von linearem, quadratischem und exponentiellem Wachstum – Modellieren	<ul style="list-style-type: none"> (11) identifizieren funktionale Zusammenhänge in Messreihen mit digitalen Hilfsmitteln (Arg-1, Arg-4, Ope-11, Ope-13) (12) wenden (...) exponentielle Funktionen zur Lösung inner- und außermathematischer Problemstellungen an (Mod-4, Mod-7, Pro-5) 	<ul style="list-style-type: none"> Pro-1 geben Problemsituationen in eigenen Worten wieder und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation Pro-2 wählen geeignete heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus Pro-5 nutzen heuristische Strategien und Prinzipien Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Ope-11 nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (dynamische Geometriesoftware, Funktionenplotter, Computer-Algebra-Systeme, Multipräsentationssysteme, Taschenrechner und Tabellenkalkulation) Ope-13 nutzen analoge und digitale Medien und Unterstützung zur Gestaltung mathematischer Prozesse 	
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen Rückblick Test		<ul style="list-style-type: none"> Mod-1 erfassen reale Situationen und beschreiben diese mit Worten und Skizzen Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen Mod-5 ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu Mod-6 erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Mod-9 benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung 	

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV V Trigonometrie	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck	Geometrie (7) begründen die Definition von Sinus, Kosinus und Tangens durch invariante Seitenverhältnisse ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke (Pro-5, Arg-9, Kom-4)	Arg-4 stellen Relationen zwischen Fachbegriffen her (Ober-/Unterbegriff) Arg-6 verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten Arg-8 erläutern vorgegebene Argumentationen und Beweise hinsichtlich ihrer logischen Struktur (Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) Arg-9 beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind Pro-5 nutzen heuristische Strategien und Prinzipien Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus Pro-10 benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen Kom-4 geben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren mit eigenen Worten und mithilfe mathematischer Begriffe wieder Ope-9 nutzen mathematische Hilfsmittel (Lineal, Geodreieck und Zirkel) zum Messen, genauen Zeichnen und Konstruieren Ope-10 nutzen Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlung) zur Informationsrecherche Mod-7 beziehen erarbeitete Lösungen auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung Mod-8 überprüfen Lösungen auf ihre Plausibilität in realen Situationen	1.3 2.1 2.2
2 Tangens	(8) erläutern den Kosinussatz als Verallgemeinerung des Satz des Pythagoras (Arg-4, Arg-8)		
3 Probleme lösen mit rechtwinkligen Dreiecken	(9) berechnen Größen mithilfe von (...) trigonometrischen Beziehungen (Pro-6, Pro-10, Ope-9)		
4 Der Kosinussatz	(10) ermitteln Maßangaben in Sachsituationen, nutzen diese für geometrische Berechnungen und bewerten die Ergebnisse sowie die Vorgehensweise (Mod-7, Mod-8, Ope-10)		
Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen Rückblick Test			

Unterrichtsvorhaben	Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen	prozessbezogene Kompetenzerwartungen	MKR
UV VI Trigonometrische Funktionen	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf Angaben im Kernlehrplan Sek I)</i>	Die Schülerinnen und Schüler.... <i>(Die Angaben beziehen sich auf den Kernlehrplan Sek I)</i>	
1 Sinus und Kosinus am Einheitskreis	<p>Funktionen</p> <p>(1) stellen Funktionen mit eigenen Worten, in Wertetabellen, als Graphen und als Terme dar (Kom-4, Kom-6, Kom-7)</p> <p>(2) verwenden aus Graph, Wertetabelle und Term ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Bearbeiten mathematischer Fragestellungen (Pro-2, Pro-3, Arg-5)</p> <p>(3) charakterisieren Funktionsklassen und grenzen diese anhand ihrer Eigenschaften ab (Arg-6, Arg-7, Kom-1)</p> <p>(4) bestimmen anhand des Graphen einer Funktion die Parameter eines Funktionsterms dieser Funktion (Arg-5, Arg-6, Arg-7)</p> <p>(5) erklären den Einfluss der Parameter eines Funktionsterms auf den Graphen der Funktion (Arg-3, Kom-9, Kom-10)</p> <p>(6) erkunden und systematisieren mithilfe dynamischer Geometriesoftware den Einfluss der Parameter von Funktionen (Pro-1, Pro-2, Pro-4, Pro-6, Ope-13)</p> <p>(7) deuten Parameter und Eigenschaften einer Funktion in Anwendungssituationen (Mod-1, Mod-5, Mod-6, Mod-7, Mod-9)</p> <p>(11) identifizieren funktionale Zusammenhänge in Messreihen mit digitalen Hilfsmitteln (Arg-1, Arg-4, Ope-11, Ope-13)</p> <p>(13) erläutern die Sinus- und Kosinusfunktion als Verallgemeinerung der trigonometrischen Definitionen des Sinus und des Kosinus am Einheitskreis (Arg-6, Arg-8)</p> <p>(14) beschreiben zeitlich periodische Vorgänge mithilfe von Sinusfunktionen (Mod-2, Mod-3, Mod-4, Mod-5).</p>	<p>Kom-1 entnehmen und strukturieren Informationen aus mathematikhaltigen Texten und Darstellungen</p> <p>Kom-4 geben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren mit eigenen Worten und mithilfe mathematischer Begriffe wieder</p> <p>Kom-5 verbalisieren eigene Denkprozesse und beschreiben eigene Lösungswege</p> <p>Kom-6 verwenden in angemessenem Umfang die fachgebundene Sprache</p> <p>Kom-9 greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter</p> <p>Kom-10 vergleichen und beurteilen Ausarbeitungen und Präsentationen hinsichtlich ihrer fachlichen Richtigkeit, Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität</p> <p>Pro-1 geben Problemsituationen in (1) eigenen Worten wieder und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation</p> <p>Pro-2 wählen geeignete heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren)</p> <p>Pro-3 setzen Muster und Zahlenfolgen fort, beschreiben Beziehungen zwischen Größen und stellen begründete Vermutungen über Zusammenhänge auf</p> <p>Pro-4 wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren, Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus</p> <p>Pro-6 entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus</p> <p>Arg-5 begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente</p> <p>Arg-6 verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten</p> <p>Arg-7 nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch)</p> <p>Arg-8 erläutern vorgegebene Argumentationen und Beweise hinsichtlich ihrer logischen Struktur (Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen)</p> <p>Ope-13 nutzen analoge und digitale Medien zur Unterstützung und zur Gestaltung mathematischer Prozesse</p> <p>Mod-2 stellen eigene Fragen zu realen Situationen, die mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten beantwortet werden können</p> <p>Mod-3 treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor</p> <p>Mod-4 übersetzen reale Situationen in mathematische Modelle bzw. wählen geeignete Modelle aus und nutzen geeignete Darstellungen</p> <p>Mod-5 (5) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu</p>	1.2

3. Fachcurricula Sek II

3.1 Unterrichtsvorhaben

Die Darstellung der Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan besitzt den Anspruch, sämtliche im Kernlehrplan angeführten Kompetenzen abzudecken. Dies entspricht der Verpflichtung jeder Lehrkraft, Schülerinnen und Schülern Lerngelegenheiten zu ermöglichen, so dass alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans von ihnen erfüllt werden können.

Die entsprechende Umsetzung erfolgt auf zwei Ebenen: den inhaltlichen Schwerpunkte und den Kompetenzerwartungen.

Die Verteilung der Unterrichtsvorhaben ist laut Beschluss der Fachkonferenz verbindlich für die Unterrichtsvorhaben I bis VI der Einführungsphase. Die zeitliche Abfolge der Unterrichtsvorhaben der Einführungsphase ist jeweils auf die Vorgaben zur Vergleichsklausur abzustimmen.

Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Um Spielraum für Vertiefungen, individuelle Förderung, besondere Schülerinteressen oder aktuelle Themen zu erhalten, wurden im Rahmen dieses schulinternen Lehrplans ca. 75 Prozent der Bruttounterrichtszeit verplant.

Der Fachkonferenzbeschluss zur Verteilung der Unterrichtsvorhaben soll für die Gewährleistung vergleichbarer Standards sowie zur Absicherung von Kurswechsler und Lehrkraftwechseln für alle Mitglieder der Fachkonferenz Bindekraft entfalten. Referendarinnen und Referendaren sowie neuen Kolleginnen und Kollegen dienen diese vor allem zur standardbezogenen Orientierung in der neuen Schule, aber auch zur Verdeutlichung von unterrichtsbezogenen fachgruppeninternen Absprachen zu didaktisch-methodischen Zugängen, fächerübergreifenden Kooperationen, Lernmitteln und -orten (sowie vorgesehenen Leistungsüberprüfungen, die im Einzelnen auch den Kapiteln 3.2 bis 3.4 zu entnehmen sind). Begründete Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bezüglich der konkretisierten Unterrichtsvorhaben sind im Rahmen der pädagogischen Freiheit der Lehrkräfte möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden. Dies ist durch entsprechende Kommunikation innerhalb der Fachkonferenz zu gewährleisten.

3.1.1 Unterrichtsvorhaben Einführungsphase

Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase	
<p>Unterrichtsvorhaben I: Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen (E-G1)</p> <p>(Zeitbedarf: ca. 12 Ustd.)</p>	
<p>Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p>	
<p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren • Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar • Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität 	
<p>Kompetenzerwartungen: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</p> <p>(1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,</p> <p>(2) stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,</p> <p>(3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,</p> <p>(4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras,</p> <p>(5) addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität,</p> <p>(6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach.</p>	
<p>Prozessbezogene Kompetenzen:</p> <p>Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,</p> <p>Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,</p> <p>Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,</p> <p>Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,</p> <p>Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...</p> <ul style="list-style-type: none"> - Darstellen von geometrischen Situationen im Raum, <p>Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,</p> <p>Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,</p> <p>Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,</p> <p>Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),</p> <p>Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,</p> <p>Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,</p> <p>Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,</p> <p>Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,</p> <p>Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.</p>	
<p>Umsetzung:</p> <p>Ausgangspunkt ist eine Vergewisserung (z. B. in Form einer Mindmap) hinsichtlich der den Schülerinnen und Schülern bereits bekannten Koordinatisierungen (kartesische Koordinaten, geographische Koordinaten, GPS, Robotersteuerung).</p>	

An geeigneten, nicht zu komplexen geometrischen Modellen (z.B. Quader) wiederholen die Schülerinnen und Schüler die aus der Sekundarstufe I bekannten Schrägbilder und nutzen ein MMS, um unterschiedliche Schrägbilder darzustellen und hinsichtlich ihrer Wirkung zu beurteilen.

Parallel zur Entwicklung einer angemessenen Raumvorstellung wird auch an der Entwicklung einer adäquaten Symbolsprache gearbeitet. Die Informationen dazu (Darstellung mit Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren) kommen von der Lehrkraft und werden von den Schülerinnen und Schülern im Rahmen von Aufgaben angewendet. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden.

Verkettungen von Verschiebungen führen grafisch und algebraisch zur Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar.

Mithilfe von Vektoren werden Punkte und Strecken (z.B. Mittelpunkte, Schnittpunkte, Diagonalen, Streckenlängen) geometrischer Figuren in unterschiedlichen Darstellungsformen ermittelt und Eigenschaften geometrischer Figuren (Viereckstypen) und besonderer Punkte (z.B. Teilungsverhältnis) nachgewiesen. Dabei wird auch der Begriff Kollinearität eingeführt und verwendet. Die Länge einer Strecke wird mithilfe des Satzes des Pythagoras bestimmt.

Materialhinweis:

- Die Koordinatisierung des Raumes kann z.B. gewinnbringend im Kontext einer Spidercam-Steuerung entwickelt bzw. vertieft werden (vgl. Sinus-Transfer-Materialien zur Spidercam).

Vernetzung:

- Physik: Kräfte und ihre Addition

Unterrichtsvorhaben II: Vektoren und Geraden – Bewegungen in den Raum (E-G2)

(Zeitbedarf: ca. 15 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar
- Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität
- Geraden und Strecken: Parameterform
- Lagebeziehungen von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend
- Schnittpunkte: Geraden

Kompetenzerwartungen: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

- (3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,
- (6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach,
- (7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- (8) interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,
- (9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
- (10) untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
- (11) nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
- (12) lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge.

Prozessbezogene Kompetenzen:

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,

Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,

Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,

Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,

Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,

Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,

Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),

Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),

Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,

Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter,

Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Zunächst wird ein geometrisches Objekt in einem Sachkontext durch Vektoren beschrieben. Dabei werden wiederholend die aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 bekannten Eigenschaften und Operationen von Vektoren genutzt und vertieft, um parallele Seiten und besondere Punkte zu ermitteln. Daran anschließend werden lineare Bewegungen z.B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen und diskutiert werden.

Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Auch die Parametrisierung einer Strecke wird in diesem Rahmen thematisiert.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie Berechnungen sollen auch ohne Hilfsmittel durchgeführt werden.

Im Anwendungskontext (z.B. Kondensstreifen von Flugzeugen) werden Lagebeziehungen von Geraden untersucht und systematisiert. Die Untersuchung von Schnittpunkten zweier durch Geraden modellierter Flugbahnen führt dabei auf ein lineares 3×2 -Gleichungssystem. Einen Bezug zu den unterschiedlichen Lagebeziehungen können die SuS herstellen, wenn sie zugleich die auf eine Landkarte reduzierte Situation mit nur 2 Gleichungen untersuchen. Einfache lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen werden als Wiederholung aus der Sekundarstufe I ohne Hilfsmittel gelöst, für komplexere LGS wird das MMS verwendet. Ein algorithmisches Lösungsverfahren (z.B. der Gaußalgorithmus) wird später in der Qualifikationsphase bei den Steckbriefaufgaben eingeführt und geübt.

Unterrichtsvorhaben III: Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen (E-A1)

(Zeitbedarf: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Funktionen und Analysis (A)

- (1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen,
- (2) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel.

Prozessbezogene Kompetenzen:

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
 Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
 Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
 Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
 Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
 Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
 Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
 Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
 Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
 Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
 Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
 Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
 Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
 Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
 Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
 Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
 Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
 Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
 Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
 Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
 Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
 Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:

Die Potenzfunktionen mit ganzrationalen Exponenten werden mithilfe des MMS untersucht und systematisiert (Verlauf, Symmetrie, besondere Punkte, Definitionsbereich, Wertebereich, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$). Dabei spielen Darstellungswechsel eine besondere Rolle. Unter Berücksichtigung von bekannten und neu eingeführten Fachbegriffen und logischen Strukturen werden Zusammenhänge erkundet und systematisiert. Die Herausforderungen der Bildungs- und Fachsprache lassen sich sprachsensibel weiterentwickeln.

Ausgehend von den Potenzfunktionen werden die ganzrationalen Funktionen definiert und mit Blick auf die Eigenschaften untersucht. Mithilfe des Graphen werden schon in diesem Unterrichtsvorhaben Monotonie und Extrempunkte fachsprachlich eingeführt und betrachtet. Im Rahmen der Nullstellenberechnung werden algebraische Rechentechniken der SI ohne Hilfsmittel

wiederholt und erweitert. Verschiedene Wege zur Berechnung der Nullstellen werden verglichen und beurteilt, dabei auftretende Fehler werden analysiert. Auch die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert.

Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung und Wiederholung der elementaren Bedienkompetenzen des MMS gerichtet werden, wobei der Fokus auf der Darstellung von Graphen inklusive Einstellungen sowie auf der Erstellung von Wertetabellen liegt.

Materialhinweis:

- Material „EF-A1 Funktionsuntersuchung mit dem MMS“ im Lehrplannavigator

Unterrichtsvorhaben IV: Transformationen von Funktionen und Einfluss von Parametern
(E-A2)

(Zeitbedarf: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelungen an den Koordinatenachsen, Verschiebungen, Streckungen

Kompetenzerwartungen: Funktionen und Analysis (A)

- (3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion),
- (4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter.

Prozessbezogene Kompetenzen:

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...

- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,

Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,

Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,

Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,

Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,

Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

Der entdeckende Einstieg in das Thema Einfluss von Parametern und Transformationen mithilfe des MMS erfolgt mit einem anwendungsbezogenen Kontext (z.B. „Temperaturmittelwerte im Jahresverlauf“ oder „Sonnenscheindauer“), bei dem die aus der SI bekannte Sinusfunktion wiederholt und in Bezug auf Fachbegriffe (Amplitude, Periode) fundiert wird. Anknüpfend an eine Systematisierung der Transformationen (Verschiebung, Streckung, jeweils in Richtung beider Achsen), ausgehend von den quadratischen Funktionen (Scheitelpunktform), werden diese auf die Sinusfunktion und auf Potenzfunktionen übertragen.

Dabei wird der Einfluss der Parameter auf die Eigenschaften dieser Funktionen erkundet. Bei Transformationen ganzrationaler Funktionen werden die Auswirkungen auf die im vorherigen Unterrichtsvorhaben betrachteten Eigenschaften sowie auf Monotonie und Extrempunkte untersucht. Für algebraische Operationen und grafische Darstellungen wird in diesem Unterrichtsvorhaben zunehmend das MMS verwendet.

Materialhinweis:

- Material „EF-A2 Beschreibung periodischer Vorgänge mithilfe der Sinusfunktion“ im Lehrplannavigator

Unterrichtsvorhaben V: Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A3)

(Zeitbedarf: ca. 18 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen: Funktionen und Analysis (A)

(5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
 (6) erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen,
 (7) erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der $\lim f(x)$ mittleren zur lokalen Änderungsrate und nutzen die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow \dots}$,
 (8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
 (9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
 (10) beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion),
 (11) leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen,
 (13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten.

Prozessbezogene Kompetenzen:

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
 Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
 Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
 Ope-(5) führen Darstellungswchsel sicher aus,
 Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
 Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
 Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
 Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
 Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
 Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
 Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
 Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
 Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
 Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
 Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
 Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit
 Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
 Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
 Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
 Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
 Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
 Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

In verschiedenen Anwendungskontexten (z.B.: Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, ...) werden durchschnittliche Änderungsraten, durchschnittliche Steigungen und anknüpfend daran Sekanten betrachtet, berechnet und im Kontext

interpretiert. Dabei werden quadratische Funktionen als Weg-Zeit-Funktion bei Fall- und Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gedeutet. Neben zeitabhängigen Vorgängen soll auch eine (geometrische) Steigung im Sachzusammenhang als Kontext betrachtet werden.

Der Begriff der lokalen Änderungsrate wird in den eingeführten Sachzusammenhängen vorstellungsgebunden genutzt. Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate wird die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät ermittelten Geschwindigkeit genutzt.

Das MMS wird zur numerischen und grafischen Darstellung des Grenzprozesses beim Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekante zur Tangente (Zoomen) eingesetzt. Hierbei wird die Limes-Schreibweise verwendet. Der Begriff der Tangente wird in Abgrenzung zu den Vorstellungen der SI problematisiert und analytisch definiert.

Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden.

Anschließend wird die Frage aufgeworfen, ob mehr als numerische und qualitative Untersuchungen in der Differentialrechnung möglich sind. Für geeignete einfache Funktionen werden der Grenzübergang bei der „h-Methode“ unter Verwendung der Limesschreibweise exemplarisch durchgeführt und erste Ableitungsfunktionen berechnet.

Um die Ableitungsregel für höhere Potenzen zu vermuten, nutzen die Schülerinnen und Schüler das MMS. Die Potenzregel für Ableitungen wird formuliert. Eine Beweisidee kann optional erarbeitet werden. Der Unterricht erweitert besonders Kompetenzen aus dem Bereich des Argumentierens.

Bei innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben vertiefen die Schülerinnen und Schüler abschließend ihre erworbenen Kompetenzen und berechnen Gleichungen von Sekanten, Tangenten und Normalen sowie Steigungswinkel.

Unterrichtsvorhaben VI: *Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)*

(Zeitbedarf: ca. 18 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen: Funktionen und Analysis (A)

- (5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
- (9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
- (12) beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung,
- (13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten,
- (14) wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln,
- (15) unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich,
- (16) verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten,
- (17) beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung,
- (18) nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten,
- (19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen:

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...

- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z.B. Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und

Effizienz,

Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,

Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik und stellen charakteristisch sind, begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,

Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,

Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),

Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,

Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,

Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,

Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,

Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,

Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,

Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,

Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Umsetzung:

Durch gleichzeitiges Visualisieren einer Ausgangsfunktion 3. Grades und der Ableitungsfunktion ergibt sich die Notwendigkeit der Summen- und Faktorregel für Ableitungen, von denen mindestens eine bewiesen wird. Gleichzeitig entdecken die Lernenden die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten der Ausgangsfunktion und der Ableitung, woran im Folgenden angeknüpft wird.

Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der vier möglichen Fälle bezogen auf das Vorzeichen an den Nullstellen der Ableitung untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen mithilfe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu argumentieren. Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms (Globalverhalten, Symmetrie) argumentieren. Dieses führt auch zur Unterscheidung von lokalen und globalen Extremstellen.

Ausgehend von grafischen Darstellungen schließen sich Untersuchungen zum Krümmungsverhalten und damit die Betrachtung von Wendestellen an. Höhere Ableitungen werden auch im Rahmen von hinreichenden Bedingungen zur Bestimmung von Extrem- und Wendestellen genutzt. Beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen werden die erworbenen Kompetenzen vernetzt und vertieft.

Summe Einführungsphase: 120 Stunden
Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 87 Stunden

3.1.2 Unterrichtsvorhaben Qualifikationsphase

Abfolge der Unterrichtsvorhaben

Grundkurs Q1	Leistungskurs Q1
GK-A1: Optimierungsprobleme	LK-A1: Optimierungsprobleme ohne und mit Parametern
GK-A2: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (inklusive LGS)	LK-A2: Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (inklusive LGS)
GK-A3: Von der Änderungsrate zum Bestand	LK-A3: Von der Änderungsrate zum Bestand
GK-A4: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendungen	LK-A4: Herleitung und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung
GK-A5: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion	LK-A5: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion
GK-G1: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen	LK-G1: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen
GK-G2: Ebenen in Koordinaten- und Parameterform	LK-G2: Ebenen in Normalenform und ihre Schnittmengen
GK-S1: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung Teil 1	LK-G3: Parametrisierung von Ebenen
	LK-G4: Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten
	LK-S1: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung
	LK-S2: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung
Grundkurs Q2	Leistungskurs Q2
GK-S1: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung Teil 2	LK-S3: Parameter und Prognosen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen
GK-S2: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung	LK-S4: Vertrauen und Verlässlichkeit – Schätzen von Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Konfidenzintervallen
GK-S3: Änderungen und Auswirkungen - Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen	LK-S5: Alles normal? – Untersuchung und Anwendung von stetigen Zufallsgrößen
GK-A6: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln	LK-A6: Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen
GK-A7: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen	LK-A7: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln
GK-G3: Untersuchungen an geometrischen Körpern	LK-A8: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen
	LK-G5: Untersuchungen an geometrischen Körpern unter Einschluss ihrer Schatten- und Spiegelbilder
	LK-G6: Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen

Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

3.1.3 Unterrichtsvorhaben GK

Qualifikationsphase Grundkurs Q1	
Unterrichtsvorhaben GK-1: Optimierungsprobleme (GK-A1) (Zeitbedarf: ca. 13 Ustd.)	
Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)	
Inhaltliche Schwerpunkte: <ul style="list-style-type: none"> • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen • Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“) 	
Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler	
(1) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese, (2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen , der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen \sqrt{x} und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen, (4) erläutern den Begriff der Umkehrfunktion am Beispiel der Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs, (5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion , der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen \sqrt{x} und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an .	
Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler	
Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch, Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ... <ul style="list-style-type: none"> – Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, – Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, – Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern, 	
Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor, Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,	
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation, Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen, Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswägen, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,	

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,

Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),

Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),

Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,

Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.

Umsetzung:

Gestartet wird mit Optimierungsproblemen mit ganzrationalen Funktionen. Als Einstiegsproblem hat sich z.B. die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, bewährt. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege entwickeln. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrerend wiederholt. An mindestens einem Problem im Sachzusammenhang entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen, die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen der Potenzfunktionen \sqrt{x} und $\frac{1}{x}$. Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden.

Anschließend wird als Exkurs exemplarisch die Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitionsbereichs und des Wertebereichs als Umkehrfunktion betrachtet.

Unterrichtsvorhaben GK-2: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (inklusive LGS) (GK-A2)

(Zeitbedarf: ca. 15 Ustd.)

Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A)
Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, [Exponentialfunktionen](#)
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: [Produktregel](#), Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Lineare Gleichungssysteme (Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra)

Kompetenzerwartungen:

Funktionen und Analysis (A): Die Schülerinnen und Schüler

- (2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, ~~Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen \sqrt{x} und $\frac{1}{x}$~~ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (3) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,
- (7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung.

Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G): Die Schülerinnen und Schüler

- (7) erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme,
- (8) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
- Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
- Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
- Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
- Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
 Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
 Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten.

Umsetzung:

Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrien, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen finden. Durch die Wahl geeigneter Modellierungen, z.B. Anstieg des Meeresspiegels, können auch Themen aus dem Kontext *Bildung für nachhaltige Entwicklung* in diesem Unterrichtsvorhaben integriert werden.

Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, ein MMS zunächst als Blackbox zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zum Zweck der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, algorithmische Lösungsverfahren (z.B. den Gauß-Algorithmus) zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Hilfsmittel durchzuführen.

Anknüpfend an die Einführungsphase werden in innermathematischen Situationen und in unterschiedlichen Kontexten (z.B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) ganzrationale Funktionen mit Parametern aufgestellt und mithilfe eines MMS untersucht. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt.

Vertiefung:

- Auch die Transformation der Sinus- und Kosinusfunktion kann wiederholend zur Modellierung eingesetzt werden.

Vernetzung:

- In diesem Unterrichtsvorhaben werden algorithmische Lösungsverfahrens für lineare Gleichungssysteme schwerpunktmäßig behandelt. Lineare Gleichungssysteme werden bei den Unterrichtsvorhaben der analytischen Geometrie ebenfalls benötigt, dort sollten aber algorithmische Lösungsverfahren keinen Schwerpunkt mehr bilden. Verschiedene Arten von Lösungsmengen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten wurden bereits in der EF bei den Lagebeziehungen von Geraden aufgegriffen.

Materialhinweis:

- Material „Meeresspiegelanstieg I – Modellierung mit ganzrationalen Funktionen“ im Lehrplannavigator
<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>

Unterrichtsvorhaben GK-3: Von der Änderungsrate zum Bestand (GK-A3)

(Zeitbedarf: ca. 8 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (11) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,
- (12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
- (13) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltfunktion,
- (14) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),

Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,

Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,

Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,

Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,

Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,

Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,

Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,

Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten im Unterrichtsvorhaben E-A3. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge).

Der Einstieg kann über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln und vergleichen eigenständig unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsumme, Ober- oder Untergrenzsumme) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.

Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen, die zur Definition des Integrals führen.

Hinweis:

- Bei der Behandlung der Produktsummen soll auch die Notation mithilfe des Summenzeichens eingeführt und geübt werden.

Materialhinweis:

- Impulse für das Stationenlernen können den Sinus-Materialien (2008) in der Materialdatenbank entnommen werden: https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=448&idcat=378&lang=9&client=12&matId=2033

Unterrichtsvorhaben GK-4: *Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendungen (GK-A4)*

(Zeitbedarf: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
- (15) erläutern geometrisch-anschaulich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und wenden ihn an,
- (16) nutzen vorgegebene Stammfunktionen und bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen,
- (17) nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen,
- (18) ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion,
- (19) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,
- Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
- Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,

Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
 Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
 Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
 Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
 Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
 Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
 Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
 Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
 Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
 Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
 Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
 Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
 Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:

Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erlassen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird durch geometrisch-anschauliche Überlegungen begründet und damit der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aufgestellt. Die Bedeutung des Hauptsatzes und seine Anwendung werden in verschiedenen Kontexten vertieft.

Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen von Stammfunktionen werden für ganzrationale Funktionen von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden auf weitere innermathematische bzw. anwendungsorientierte Situationen übertragen, die auch Flächen zwischen Funktionsgraphen umfassen. Bei geeigneten Problemstellungen werden die Intervalladditivität und Linearität des Integrals thematisiert. Geeignete Problemstellungen werden in diesem Unterrichtsvorhaben auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

Unterrichtsvorhaben GK-5: *Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (GK-G1)*
 (Zeitbedarf: ca. 7 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Vektoroperation: Skalarprodukt

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- (9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
 Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
 Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
 Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
 Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
 Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
 Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
 Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
 Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
 Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
 Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist jedoch die Zerlegung eines Vektors \vec{a} in zu \vec{b} parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dieses wird am Beispiel der Kräftezerlegung (z.B. Zerlegung in vertikale und horizontale Komponenten beim Schlittenziehen) veranschaulicht.

Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht.

Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produkts von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. Division durch einen Vektor) und vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen gestellt.

Unterrichtsvorhaben GK-6: Ebenen in Koordinaten- und Parameterform (GK-G2)

(Zeitbedarf: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Lineare Gleichungssysteme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- (2) stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar,
- (3) verwenden Koordinatenformen von Ebenen zur Orientierung im Raum (Punktprobe, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Normalenvektor),
- (4) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,

(8) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,

Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum...

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,

Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,

Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,

Arg (5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,

Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

Die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ kann anknüpfend an Geradengleichungen $a \cdot x + b \cdot y = d$ in der Ebene durch Erweitern um eine Variable eingeführt. **Oder es wird die Parameterform zum Einstieg verwendet.** Zur Erkundung soll eine Visualisierung mit einem MMS dienen, bei der die Achsenabschnitte $a_i = d/n_i$ (für $n_i \neq 0$) ins Spiel kommen, die in der Achsenabschnittsform $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$ auftreten. Diese Form bietet den Vorteil, eindeutig zu sein, und erlaubt es, die Lage der Ebene im Koordinatensystem zeichnerisch darzustellen.

Die Schnittpunktberechnung (Durchstoßpunkt) zwischen Geraden und Ebenen ist mit der Koordinatenform besonders einfach, wenn ein allgemeiner Punkt der Gerade (parametrisierte Punktmenge) in die Koordinatenform eingesetzt wird. Die Achsenabschnittsberechnung ordnet sich dabei als Spezialfall ein. Auch Spurgeraden in den Hauptebenen werden mit dem Einsetzungsprinzip ermittelt.

Die Notation mithilfe des in GK-G1 eingeführten Skalarproduktes $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$ führt zur Deutung von \vec{n} als Normalenvektor, der senkrecht auf der Ebene steht. Der Einfluss von d , mit dem sich die Ebene parallel verschieben lässt, wird erkundet. Um eine Gleichung einer Ebene aus drei Punkten aufzustellen, soll dies dem Prinzip einer Steckbriefaufgabe folgend (vgl. GK-A2) mit einem 3x3-Gleichungssystem durch Einsetzen der drei Punkte in die Gleichung $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ erfolgen, wobei d als Parameter im MMS mitläuft oder $d = 1$ (in Sonderfällen $d = 0$) gesetzt werden kann.

Als Kontext für die anschließend zu thematisierende Parameterform einer Ebene dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem

Thema E-G1 wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Der Übergang zur Koordinatenform erfolgt als Alternative zum „Steckbriefverfahren“ auch durch die Bestimmung eines Normalenvektors mithilfe eines unterbestimmten 2×3 -Gleichungssystems. Ein explizites Arbeiten mit der Normalenform soll aber nur im Rahmen einer Differenzierung erfolgen.

Der umgekehrte Übergang von der Koordinatenform zur Parameterform kann über drei Punkte (z.B. die Achsenabschnitte) bewerkstelligt werden, oder indem zwei (zu \vec{n} orthogonale) Spannvektoren der Ebene aus Gleichungen des Typs $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ gewonnen werden.

Vernetzung:

- Ein systematisches Verfahren, lineare Gleichungssysteme auch hilfsmittelfrei in einfachen Fällen zu lösen, wurde bereits im Unterrichtsvorhaben GK-A2 eingeführt. Um hier Möglichkeiten des weiteren Übens und Wiederholens zu schaffen, können Durchstoßpunkte alternativ mit Ebenen in Parameterform in einfachen Fällen berechnet werden. Des Weiteren führt die Punktprobe bei Ebenen in Parameterform auf ein 3×2 -Gleichungssystem.

Vertiefung:

- Ein Normalenvektor kann mit einem MMS auch mithilfe des Vektorprodukts berechnet werden.

Unterrichtsvorhaben GK-7: Teil 1 Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (GK-S1)

(Zeitbedarf: ca. 17 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
- (2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,
- (3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
- (5) bestimmen das Gegenereignis \bar{A} , verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,
- (6) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- (7) prüfen Teilvergänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,
- (8) lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
- (9) erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen,
- (10) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...

- Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,

Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,

Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,

Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus.

Umsetzung:

Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) wird das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet.

Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet.

Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilevorgängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten, wie Zufallsantworten bei sensitiven Fragen und Diagnosetests für Krankheiten (z.B. Corona-Test).

Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. Auch hierbei wird ein MMS zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung des hilfsmittelfreien Rechnens verwendet.

Hinweis:

- Bei der Auswahl der Kontexte für Modellierungen und Aufgabenstellungen sollten im gesamten Unterrichtsvorhaben die Möglichkeiten unterschiedlicher Lebensweisen, Identitäten und Orientierungen sensibel berücksichtigt werden. Das bedeutet insbesondere, dass die Merkmale „weiblich“ und „männlich“ nicht als komplementär betrachtet werden sollten, da es neben den Geschlechtern „weiblich“ und „männlich“ auch das Geschlecht „divers“ sowie die Möglichkeit gibt, den Geschlechtseintrag im

<p>Personenstandsregister offenzulassen. Die Komplementärmenge von „weiblich“ sollte daher „nicht weiblich“ sein.</p>
<p><u>Summe Grundkurs Q1: 120 Unterrichtsstunden</u></p> <p><u>Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 90 Unterrichtsstunden</u></p>
<p>Qualifikationsphase</p> <p>Grundkurs Q2</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben GK-7: Teil 2 Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (GK-S1)</u></p> <p>S.O.</p>
<p><u>Unterrichtsvorhaben GK-8: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung (GK-S2)</u></p> <p>(Zeitbedarf: ca. 10 Ustd.)</p> <p>Inhaltsfeld: Stochastik (S)</p> <p>Inhaltliche Schwerpunkte:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln • Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme <p>Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>(4) verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten,</p> <p>(6) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,</p> <p>(11) begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können.</p> <p>Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler</p> <p>Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,</p> <p>Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,</p> <p>Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,</p> <p>Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,</p> <p>Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,</p> <p>Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,</p> <p>Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,</p> <p>Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,</p> <p>Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,</p> <p>Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,</p> <p>Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,</p> <p>Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,</p> <p>Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,</p>

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,

Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:

Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg“ oder „Misserfolg“) wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird erklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoullikette jeweils eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoullikette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Be trachtung von Multiple-Choice-Tests an. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zugänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementärereignissen möglich.

Vernetzung:

- Das Summenzeichen wird als Schreibweise bei den kumulierten Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung wieder aufgegriffen.

Unterrichtsvorhaben GK-9: Änderungen und Auswirkungen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (GK-S3)

(Zeitbedarf: ca. 11 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (10) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen,
- (12) erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung,
- (13) nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen,
- (14) interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
 - Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
 - Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,

Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,

Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Eine Visualisierung der Binomialverteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung eines MMS. Anhand derartiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Binomialverteilung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Herleitung der Standardabweichung ist, mithilfe eines MMS bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$.

In verschiedenen Anwendungszusammenhängen werden sodann Problemstellungen mit binomialverteilten Zufallsgrößen untersucht, die jeweils eine Berechnung der Parameter k , p oder n verlangen. Mit dem Erwartungswert lässt sich auch der Begriff eines „fairen“ Spiels aufgreifen.

Die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit wird bewusst als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit interpretiert. Die Genauigkeit dieser Schätzung steigt mit dem Stichprobenumfang.

Vertiefung:

- In einem Sachkontext wird das Konzept der σ -Umgebungen exemplarisch behandelt.

Unterrichtsvorhaben GK-10: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (GK-A5)
 (Zeitbedarf: ca. 13 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, ~~der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen \sqrt{x} und $\frac{1}{x}$~~ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (9) beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion ($f' = f$),
- (10) verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,

Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...

- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,

Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,

Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
 Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
 Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten,
 Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter der a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer wiederholenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand.

Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation (Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden.

Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse betrachtet.

Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch, exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden Annahmen und Grenzen der Modelle sind der Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen.

Materialhinweis:

- Material „Meeresspiegelanstieg II – Modellierung mit Exponentialfunktionen“ im Lehrplannavigator (<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-sii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)

Unterrichtsvorhaben GK-11: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln (GK-A6)

(Zeitbedarf: ca. 9 Ustd).

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen \sqrt{x} und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen \sqrt{x} und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an,

(6) wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an,
 (8) nutzen in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
 Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
 Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
 Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
 Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
 Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
 Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
 Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
 Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
 Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
 Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
 Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
 Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
 Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
 Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
 Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
 Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
 Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
 Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
 Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter,
 Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

In diesem Unterrichtsvorhaben werden die noch fehlenden Ableitungsregeln (Produktregel und Spezialfall der Kettenregel für Verknüpfungen von Exponentialfunktionen mit linearen Funktionen) hergeleitet. Dazu können zunächst Vermutungen für die Ableitungen von Produkten von ganzrationalen Funktionen aufgestellt und durch Ausmultiplizieren und Anwenden der bereits bekannten Ableitungsregeln überprüft werden. Vorgelegte Argumentationsketten werden erläutert, beurteilt und für den Beweis der Produktregel genutzt. Die Kettenregel für Exponentialfunktionen mit linearen Funktionen im Exponenten kann graphisch mithilfe der bekannten Zusammenhänge beim Transformieren von Funktionsgraphen entdeckt werden.

Mithilfe der neu gewonnen Ableitungsregeln werden schließlich in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen betrachtet und in unterschiedlichen innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben verwendet. Dabei ist es mithilfe eines MMS oder mithilfe von vorgegebenen Ableitungen auch möglich, weitere Verkettungen von ganzrationalen Funktionen mit Exponentialfunktionen zu betrachten. Vorgelegte Stammfunktionen werden nachgewiesen und verwendet. Neben

rechnerischen Zugängen werden außerdem Eigenschaften von Funktionen als Argumente zur Lösung von Aufgaben verwendet.

Unterrichtsvorhaben GK-12: *Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (GK-A7)*

(Zeitbedarf: ca. 11 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen:

- (2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen \sqrt{x} und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen \sqrt{x} und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an,
- (7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung,
- (8) nutzen in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge,
- (19) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,
- (20) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion und daraus zusammengesetzten Funktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen:

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,
- Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,

Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,

Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,

Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,

Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,

Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,

Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte.

Umsetzung:

Im letzten Unterrichtsvorhaben zur Analysis werden die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Unterrichtsvorhaben gebündelt und an komplexeren Situationen sowohl bei innermathematischen Problemstellungen als auch bei Aufgaben mit Anwendungsbezug geübt und vertieft.

Anschließend werden Prozesse, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamentenkonzentration, Fieber, Pflanzenwuchs...), in den Blick genommen und mithilfe von Produkten und Verkettungen von Funktionen modelliert. Dabei ergeben sich Fragen, bei denen aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamtbestand bzw. -effekt geschlossen wird. Integrale von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen können in diesem Unterrichtsvorhaben mit einem MMS oder mithilfe vorgegebener Stammfunktionen berechnet werden.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch periodische Prozesse (z.B. Sonnenscheindauer, akustische Signale) untersucht, bei denen Sinus- und Kosinusfunktionen abgeleitet und mit anderen Funktionen verknüpft werden.

Unterrichtsvorhaben GK-13: Untersuchungen an geometrischen Körpern (GK-G3)

(Zeitbedarf: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfelder: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- (2) stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar,
- (3) verwenden Koordinatenformen von Ebenen zur Orientierung im Raum (Punktprobe, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Normalenvektor),
- (5) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
- (6) nutzen Symmetriebetrachtungen in geometrischen Objekten zur Lösung von Problemstellungen und spiegeln Punkte an Ebenen in einfachen Fällen,
- (9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum...

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,

Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,

Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,

Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,

Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,

Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Umsetzung:

Geometrische Körper wie u.a. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen, können auf reale Objekte bezogen oder auch zur Gestaltung von virtuellen Landschaften benutzt werden. Schattenwürfe geometrischer Körper in Parallelprojektion (Sonnenlicht) oder Zentralprojektion (Lichtquelle) auf eine Ebene, insbesondere die Grundebenen, werden berechnet. Der Einsatz eines MMS bietet hier zusätzliche Möglichkeiten der Variation und der Visualisierung.

Symmetriebetrachtungen (z.B. beim Übergang zur Doppelpyramide / zum Oktaeder) werfen die Frage auf, wie sich Spiegelungen an Ebenen durchführen lassen. In einfachen Fällen, in denen der Normalenvektor in Richtung einer Koordinatenachse weist, werden die Koordinaten eines an der Ebene gespiegelten Punktes ermittelt. Der Nachweis der Symmetrie zu einer gegebenen Ebene wird durch einen Vergleich des Normalenvektors mit dem Verbindungsvektor zwischen Punkt und Spiegelpunkt geführt, wobei zusätzlich eine Punktprobe nötig ist, um zu zeigen, dass der Mittelpunkt in der Ebene liegt.

Winkel lassen sich zwischen den Kanten und Flächen eines Körpers bestimmen. Speziell die Böschungswinkel an einer Pyramide motivieren die Frage nach dem Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen.

Vernetzung:

- Inhaltlich nimmt die Parallelprojektion die Behandlung von Schrägbildern aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder auf.

Vertiefung:

- Die Bestimmung von Winkeln zwischen Geraden und Ebenen oder zwei Ebenen lässt Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung zu. Dadurch lässt sich ein im Unterrichtsvorhaben E-G2 begonnenes Thema ausbauen.

Summe Grundkurs Q2: 90 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 60 Unterrichtsstunden

3.1.4 Unterrichtsvorhaben LK

Qualifikationsphase

Leistungskurs Q1

Unterrichtsvorhaben LK-1: Optimierungsprobleme ohne und mit Parametern (LK-A1)

(Zeitbedarf: ca. 18 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) lösen biquadratische Gleichungen auch ohne Hilfsmittel,
- (2) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
- (3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
- (6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,
- (7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,
- Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

- Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
- Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
- Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
- Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
- Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
- Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
- Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.

Umsetzung:

Zur Reaktivierung der Vorkenntnisse der Differentialrechnung werden Funktionen vierten Grades untersucht. Dies umfasst insbesondere das hilfsmittelfreie Lösen von biquadratischen Gleichungen.

Anschließend werden zunächst Optimierungsprobleme mit ganzrationalen Funktionen ohne Parameter betrachtet. Als Einstiegsproblem hat sich z.B. die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, bewährt. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege entwickeln. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrierend wiederholt.

An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (noch ohne die Produkt- oder Kettenregel). Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden, ohne dass Ableitungen hilfsmittelfrei gebildet werden müssen (z.B. „Zylinder in einer Kugel“).

Anschließend werden Optimierungsprobleme bei Funktionen mit Parametern betrachtet. Hier kann z.B. auch das Problem der offenen Schachtel wieder aufgegriffen werden, indem nicht von einem Papier mit festen Maßen ausgegangen wird, sondern nur ein Seitenverhältnis der Papierseiten vorgegeben wird oder die Länge einer Seite offenbleibt, sodass bei der Zielfunktion eine Parameterabhängigkeit entsteht.

Mit vorgegebenen ganzrationalen Funktionen mit Parametern (Funktionsscharen) werden anknüpfend innermathematische Situationen (Funktionsscharen) und anwendungsbezogene Kontexte mit Parametern (z.B. Brücken, Gebäude, Flugbahnen) untersucht, bei denen Extrempunkte eine Rolle spielen. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt.

Unterrichtsvorhaben LK-2: Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (inklusive LGS) (LK-A2)

(Zeitbedarf: ca. 20 Ustd.)

Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A)

Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, ~~Exponentialfunktionen~~, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Lineare Gleichungssysteme (Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra)

Kompetenzerwartungen:

Funktionen und Analysis (A): Die Schülerinnen und Schüler

- (3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, ~~Exponentialfunktionen~~, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, ~~der natürlichen Logarithmusfunktion~~ und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (4) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,
- (5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen.

Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G): Die Schülerinnen und Schüler

- (6) erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme,
- (7) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind,
- (8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
- Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
- Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,

Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,

Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,

Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,

Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten.

Umsetzung:

Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrie, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen. Durch die Wahl geeigneter Modellierungen, z.B. Anstieg des Meeresspiegels, können auch Themen aus dem Kontext *Bildung für nachhaltige Entwicklung* in diesem Unterrichtsvorhaben integriert werden.

Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, ein MMS zunächst als Blackbox zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zum Zweck der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, algorithmische Lösungsverfahren (z.B. den Gauß-Algorithmus) zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Hilfsmittel durchzuführen. Über freie Parameter (in Lösungen aus unterbestimmten Gleichungssystemen) können Funktionsscharen erzeugt und damit ein Rückbezug zum Unterrichtsvorhaben LK-A1 hergestellt werden.

Anschließend werden mithilfe von Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechenden Kosinusfunktionen periodische Situationen (z.B. Sonnenscheindauer im Jahresverlauf) wiederholend modelliert. Dabei sollen die einzelnen Parameter mit und ohne MMS bestimmt werden.

Hinweise:

- Zur Förderung besonders leistungsstarker Schülerinnen und Schüler bietet es sich an, sie selbstständig zur Spline-Interpolation forschen und referieren zu lassen.

Vernetzung:

- In diesem Unterrichtsvorhaben werden algorithmische Lösungsverfahren und mögliche Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme (leere Menge, eindeutige Lösung oder unendlich viele Lösungen) schwerpunktmäßig behandelt. Lineare Gleichungssysteme werden bei den Unterrichtsvorhaben der analytischen Geometrie erneut benötigt, dort sollten aber algorithmische Lösungsverfahren keinen Schwerpunkt mehr bilden. Verschiedene Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme werden bei den Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen wieder aufgegriffen und geometrisch ge deutet (leere Menge, Punkt, Gerade, Ebene).

Materialhinweis:

- Material „Meeresspiegelanstieg I – Modellierung mit ganzrationalen Funktionen“ im Lehrplannavigator
(<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)

Unterrichtsvorhaben LK-3: Von der Änderungsrate zum Bestand (LK-A3)

(Zeitbedarf: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (14) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,
- (15) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
- (16) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltfunktion,
- (17) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
- Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
- Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
- Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,

Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,

Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,

Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,

Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,

Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten im Unterrichtsvorhaben E-A3. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Daneben wird die Rekonstruktion einer Größe (z.B. physikalische Arbeit) thematisiert, bei der es sich nicht um die Rekonstruktion eines Bestandes handelt.

Der Einstieg **kann** über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsummen) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. ~~Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülerverträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.~~

Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit werden immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit dem Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Aus den übereinstimmenden Grenzwerten von Ober- und Untersummen ergibt sich die Definition des Integrals.

Hinweise:

- Bei der Behandlung der Produktsummen soll auch die Notation mithilfe des Summenzeichens eingeführt und geübt werden.

Materialhinweis:

- Impulse für das Stationenlernen können den Sinus-Materialien (2008) in der Materialdatenbank entnommen werden: https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=448&idcat=378&lang=9&client=12&matId=2033

Unterrichtsvorhaben LK-4: Herleitung und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (LK-A4)

(Zeitbedarf: ca. 18 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung,
- (15) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung,
- (18) begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs und wenden den Hauptsatz an,
- (19) bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, nutzen vorgegebene Stammfunktionen ~~und verwenden die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $x \mapsto \frac{1}{x}$~~ ,
- (20) nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen,
- (21) ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion,
- (22) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,
- Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
- Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüsselichkeit und Effizienz,
- Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
- Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
- Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:

Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a

erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird anschaulich, kontextgebunden und numerisch begründet.

Um den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch tiefergehend zu begründen, wird der absolute Zuwachs $I_a(x+h) - I_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren. In diesem Rahmen werden auch die Intervall-additivität und Linearität des Integrals formal gefasst.

Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen für Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet. Dabei finden sie auch heraus, dass dies nicht in jedem Fall möglich ist und es Funktionen wie $f(x) = \frac{1}{x}$ gibt, für deren Stammfunktionen noch kein Funktionsterm zur Verfügung steht.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden für die Berechnung von Flächen zwischen Funktionsgraphen genutzt und auf weitere zunehmend komplexe innermathematische und anwendungsorientierte Situationen übertragen. Geeignete Problemstellungen werden auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

Unterrichtsvorhaben LK-5: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (LK-A5)

(Zeitbedarf: ca. 15 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, ~~Sinusfunktionen~~ der Form $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, ~~Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion~~ und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
- (10) beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion ($f' = f$),
- (11) verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,
- Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,

Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Varianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,

Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,

Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten,

Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS kann das Verhalten des Differenzenquotienten für immer kleinere h betrachtet werden. Durch Variation der Stelle der Ableitung entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand (Differentialgleichung).

Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation (Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden.

Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse und Wachstumsprozesse mit Parametern (Funktionsscharen) betrachtet.

Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch, exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden Annahmen und die Grenzen der Modelle sind der Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen.

Materialhinweis:

- Material „Meeresspiegelanstieg II – Modellierung mit Exponentialfunktionen“ im Lehrplannavigator (<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-sii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)

Unterrichtsvorhaben LK-6: *Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (LK-G1)*
(Zeitbedarf: ca. 7 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Vektoroperation: Skalarprodukt

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(2) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
(12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung zunächst eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist die Zerlegung eines Vektors \vec{a} in zu \vec{b} parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont, der später zum Verständnis der Abstandsmessung zwischen Punkten und Ebenen genutzt werden kann.

Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Am Beispiel der physikalischen Arbeit kann das geometrische Verständnis des Skalarprodukts veranschaulicht.

Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht.

Die besonderen formalen Eigenschaften des Skalarprodukts sowie die dafür gültigen Rechengesetze werden im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. keine Division durch einen

Vektor, kein Satz vom Nullprodukt) sowie vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen thematisiert.

Vertiefung:

- Im Rahmen eines arbeitsteiligen Vorgehens kann ein Vergleich von Lösungswegen mit und ohne Skalarprodukt dahinterliegende elementargeometrische Sätze transparent machen wie z.B. die Äquivalenz der zum Nachweis einer Raute benutzten Bedingungen $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ und $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ für die Seitenvektoren \vec{a} und \vec{b} eines Parallelogramms. Ein ähnliches Vorgehen ist beim Beweis des Satzes des Thales möglich.
- Im Sinne der Wissenschaftspropädeutik ist neben einem Einblick in die Möglichkeit einer axiomatischen Festlegung eines Skalarproduktes durch seine algebraischen Eigenschaften wichtig, dass durch ein Skalarprodukt zugleich Längen- als auch Winkelmessung in einem Vektorraum ermöglicht werden.

Unterrichtsvorhaben LK-7: Ebenen in Normalenform und ihre Schnittmengen (LK-G2)

(Zeitbedarf: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)**Inhaltliche Schwerpunkte:**

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (2) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- (3) stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
- (4) untersuchen Lagebeziehungen von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen,
- (5) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
- (8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen,
- (9) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
- (10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,

Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum...

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,

Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,

Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,

Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,

Arg (5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,

Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege.

Umsetzung:

Im Sinne verstärkt wissenschaftspropädeutischen Arbeitens **kann** folgender anspruchsvoller, an das Unterrichtsvorhaben LK-G1 anknüpfender Weg vorgeschlagen **werden**: Betrachtet wird die als Punkt-Normalenform bekannte Gleichung: $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen wie $\vec{a} = \vec{0}$ wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet. Die Schnittmenge zweier Ebenen wird durch Lösung eines linearen 2x3-Gleichungssystems bestimmt. Dabei

müssen die Lernenden eine nicht leere Lösungsmenge selbständig parametrisieren und als Schnittgerade identifizieren.

Zur Klärung der Parallelität von Geraden und Ebenen oder Ebenen untereinander werden Normalenvektoren herangezogen. Über die Normalenvektoren wird die Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren auch auf Ebenen übertragen.

Die unterschiedlichen Darstellungsformen dieser Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform¹ als Sonderformen der Normalenform) können in einem Gruppenpuzzle gegenübergestellt und in Beziehung gesetzt. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse.

Die Hesse-Normalenform¹ erlaubt es, Abstände eines Punktes von der Ebene sowie Abstände zwischen parallelen Ebenen direkt abzulesen. Dabei wird eine Verknüpfung zur Grundvorstellung der Projektion (LK-G1) hergestellt. Verfahrenstechnisch macht es keinen Unterschied, ob es sich nun um den Abstand eines Punktes, einer parallelen Geraden oder einer parallelen Ebene von einer Ebene handelt.

Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Die Achsenabschnittsberechnung ist dabei nur ein Spezialfall der besonders einfachen Schnittmengenberechnung zwischen Geraden und Ebenen (Durchstoßpunkt) in Koordinatenform.

Einen verständnisorientierten Zugang zur Abstandsberechnung zwischen einem Punkt und einer Ebene bietet das Lotfußpunktverfahren, das auch auf weitere Abstandsprobleme (vgl. LK-G4) übertragen werden kann.

Vernetzung:

- Die Gleichungen eines linearen 2x3- oder 3x3-Gleichungssystems (LK-A2) können als Koordinatengleichungen interpretiert werden, so dass die Lösungsmenge des LGS als Schnittmenge von Ebenen geometrisch gedeutet werden kann. Ihre Dimension lässt sich aus der Lagebeziehung der Ebenen erkennen. Dabei wird deutlich, wie weit die Normalenvektoren die Lagebeziehungen zwischen 2 oder 3 Ebenen bestimmen.

Unterrichtsvorhaben LK-8: Parametrisierung von Ebenen (LK-G3)

(Zeitbedarf: ca. 8 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Lineare Gleichungssysteme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) stellen Ebenen, Parallelogramme und Dreiecke in Parameterform dar,
- (3) stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
- (4) untersuchen Lagebeziehungen von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen,
- (5) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
- (7) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind,
- (8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

¹ Die Hesse-Normalenform gehört nicht zur Obligatorik des KLP und ist damit nicht verpflichtend. Aus didaktischen Gründen wurde sie für diesen Zugang in diesem beispielhaften Plan vertiefend integriert.

Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,

Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum...

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,

Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,

Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,

Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,

Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),

Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

Als weitere Darstellungsform wird nun **verstärkt** die Parameterform der Ebenengleichung **eingesetzt**. Als Einstiegskontext dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs der Parameter werden Parallelogramme und Dreiecke beschrieben.

Die Berechnung von Schnittmengen zwischen Ebenen und Geraden ist sowohl über ein 3x3-LGS möglich, wenn beide in Parameterform vorliegen, als auch durch Einsetzen einer Geradengleichung in eine Koordinatengleichung. Für einen Wechsel zwischen Parameterform und Koordinatenform einer Ebene wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines 2x3-Gleichungssystems bestimmt. Die Entscheidung über Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Geraden kann direkt mit der Schnittmengenberechnung verknüpft werden.

Vernetzung:

- Der Unterricht wird durch den Einsatz eines MMS bei der Lösung linearer Gleichungssysteme entlastet. Es ist jedoch sinnvoll, numerisch einfache Fälle auch hilfsmittelfrei zu bearbeiten, um die bereits im Unterrichtsvorhaben LK-A2 erworbenen Kompetenzen zu reaktivieren und zu festigen.

Vertiefung:

- Die Bestimmung eines Normalenvektors mit Hilfe des Vektorproduktes ist nicht primär wegen der technischen Einfachheit gewinnbringend, sondern weil die Entwicklung einer tragfähigen geometrischen Vorstellung des Vektorproduktes sowie eine Beschreibung seiner algebraischen Eigenschaften den im Unterrichtsvorhaben LK-G1 für das Skalarprodukt beschrittenen Weg weiterverfolgt und auch eine hohe Relevanz für den Physikunterricht besitzt. Vertiefend kann das Vektorprodukt für die Flächenberechnung bei Parallelogrammen und Dreiecken sowie für die Volumenberechnung beim Spatprodukt eingesetzt werden.
- Die Berechnung von Schnittmengen zwischen zwei Ebenen kann besonders einfach mit einer Gleichung erfolgen, wenn eine Ebene in Koordinaten- und eine in Parameterform gegeben ist.
- Vertiefend kann die Parallelität zwischen einer Ebene und einer Geraden durch die lineare Abhängigkeit des Richtungsvektors der Geraden von den Spanvektoren der Ebene beschrieben werden (Komplanarität).

Unterrichtsvorhaben LK-9: *Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (LK-G4)*

(Zeitbedarf: ca. 6 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,
 (12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
 Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
 Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
 Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
 Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
 Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
 Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
 Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
 Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
 Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.

Umsetzung:

Die Abstandsbestimmung erweitert sowohl die Beschreibung von Lagebeziehungen als auch die Schnittmengenproblematik. Bei Ebenen wurden Abstandsbestimmungen bereits im Unterrichtsvorhaben LK-G2 mit der Hesse-Normalenform behandelt.

Am Beispiel des Vorbeifluges eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen, insbesondere ein Lösungsweg mit den Mitteln der Analysis. Die Mittel der Analysis lassen sich auch nutzen, um im Anschluss den minimalen Abstand zweier Flugobjekte mithilfe eines MMS zu bestimmen.

Im Unterschied dazu knüpft die Abstandsberechnung von Flugbahnen an die Untersuchung von Lagebeziehungen von Geraden aus dem Unterrichtsvorhaben E-G2 an. Ihre Berechnung kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten - insbesondere unter Einschluss von Hilfsebenen - genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nicht.

Vernetzung:

- Das Unterrichtsvorhaben knüpft sehr eng an das Unterrichtsvorhaben E-G2 an. Insbesondere ist eine integrierende Wiederholung der Lagebeziehungen von Geraden und ihrer Bestimmung vorzusehen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung (E-A4) bietet sich durchgehend an und sollte unter der Maxime einer möglichst großen Lösungsvielfalt und als Chance zur Binnendifferenzierung nicht fehlen.

Unterrichtsvorhaben LK-10: *Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (LK-S1)*

(Zeitbedarf: ca. 18 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
- (2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,
- (3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
- (5) bestimmen das Gegenereignis \bar{A} , verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,
- (7) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- (8) prüfen Teilvergänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,
- (9) lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
- (10) erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen,
- (11) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
 Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
 Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
 Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
 Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
 Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
 Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
 Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
 Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
 Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
 Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
 Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
 Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,

- Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus.

Umsetzung:

Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) kann das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet.

Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS (Nutzung des Zufallsgenerators) – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet.

Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvorgängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten wie Zufallsantworten bei sensitiven Fragen und Diagnosetests für Krankheiten (z.B. Corona-Test).

Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. Auch hierbei wird ein MMS zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung des hilfsmittelfreien Rechnens verwendet.

Hinweis:

- Bei der Auswahl der Kontexte für Modellierungen und Aufgabenstellungen sollten im gesamten Unterrichtsvorhaben die Möglichkeiten unterschiedlicher Lebensweisen, Identitäten und Orientierungen sensibel berücksichtigt werden. Das bedeutet insbesondere, dass die Merkmale „weiblich“ und „männlich“ nicht als komplementär betrachtet werden sollten, da es neben den Geschlechtern „weiblich“ und „männlich“ auch das Geschlecht „divers“ sowie die Möglichkeit gibt, den Geschlechtseintrag im Personenstandsregister offenzulassen. Die Komplementärmenge von „weiblich“ sollte daher „nicht weiblich“ sein.

Unterrichtsvorhaben LK-11: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung

(LK-S2)

(Zeitbedarf: ca. 12 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ -Regeln

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (4) verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten,
- (6) erklären die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten und berechnen diesen in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel,
- (7) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- (12) begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,

Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:

Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg“ oder „Misserfolg“) wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird erklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoullikette jeweils eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoullikette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Be- trachtung von Multiple-Choice-Tests an. Ausgehend von der kombinatorischen Bedeutung wird der Binomialkoeffizient im Folgenden in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel berechnet. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zugänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementärereignissen möglich.

Vernetzung:

- Das Summenzeichen wird als Schreibweise bei den kumulierten Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung wieder aufgegriffen.

Summe Leistungskurs Q1: 200 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 142 Unterrichtsstunden

Qualifikationsphase

Leistungskurs Q2

Unterrichtsvorhaben LK-12: *Parameter und Prognosen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (LK-S3)*

(Zeitbedarf: ca. 15 Ustd.)

Inhaltsfelder: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ -Regeln
- Beurteilende Statistik: Prognoseintervall, ~~Konfidenzintervall~~, Stichprobenumfang

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (11) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen,
- (13) erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung,
- (14) nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen,
- (16) ermitteln mit Hilfe der σ -Regeln Prognoseintervalle für die absoluten und relativen Häufigkeiten in einer Stichprobe und interpretieren diese im Sachkontext.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
 - Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
 - Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen,
- Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,

Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,

Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Eine Visualisierung der Binomialverteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung eines MMS. Anhand derartiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Binomialverteilung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Herleitung der Standardabweichung ist, mithilfe eines MMS bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$.

In verschiedenen Anwendungszusammenhängen werden sodann Problemstellungen mit binomialverteilten Zufallsgrößen untersucht, die jeweils eine Berechnung der Parameter k , p oder n verlangen. Mit dem Erwartungswert lässt sich auch der Begriff eines „fairen“ Spiels aufgreifen.

Das Konzept der σ -Umgebungen wird durch die Untersuchung von Binomialverteilungen mit verschiedenen n und p entwickelt. Die σ -Regeln werden benutzt, um Prognoseintervalle für unterschiedliche Sicherheitswahrscheinlichkeiten zu ermitteln und im Sachzusammenhang zu interpretieren.

Am Ende dieses Unterrichtsvorhabens bietet sich die Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen Stichprobenumfang und der Länge des Prognoseintervalls zu untersuchen und durch eine Visualisierung mithilfe eines MMS das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz der großen Zahlen zu veranschaulichen.

Unterrichtsvorhaben LK-13: Vertrauen und Verlässlichkeit – Schätzen von Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Konfidenzintervallen (LK-S4)

(Zeitbedarf: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfelder: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Beurteilende Statistik: Prognoseintervall, Konfidenzintervall, Stichprobenumfang

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(15) interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit,

(17) ermitteln auf Grundlage einer relativen Häufigkeit ein Konfidenzintervall für den Parameter p einer binomialverteilten Zufallsgröße und interpretieren das Ergebnis im Sachkontext (Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit),

(18) schätzen den für ein Konfidenzintervall vorgegebener Länge erforderlichen Stichprobenumfang ab.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
- Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
 - Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen,
 - Berechnen der Grenzen von Konfidenzintervallen im Leistungskurs,
- Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
- Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
- Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,
- Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
- Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
- Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
- Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten,
- Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

Ausgehend von der Modellierung einer Sachsituation (z.B. Wahrscheinlichkeit von Retouren im Onlinedienst; Glücksrad auf einer schiefen Ebene; Eichgewicht bei Lebensmittelverpackungen) mit einer Binomial-verteilung, deren Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt ist, stellt sich die Frage nach der Schätzung der unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit. Eine erste Annäherung erfolgt durch die Punktschätzung der relativen Häufigkeit in einer Stichprobe (Rückschluss auf die Gesamtheit).

Um zu einer Intervallschätzung zu kommen, werden zunächst mithilfe eines MMS von der Trefferwahrscheinlichkeit p abhängige 95%-Prognoseintervalle in einem Ellipsendiagramm dargestellt, de-

ren Randfunktionen durch h_{\pm} mit $h_{\pm}(p) = p \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ beschrieben werden.

Mithilfe dieser Darstellung kann für eine relative Häufigkeit in einer Stichprobe ein Intervall von Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden, das mit dieser Stichprobe „verträglich“ ist. Dieses Intervall wird als Konfidenzintervall bezeichnet (Rückschluss auf die Gesamtheit). Um Konfidenzintervalle für andere relative Häufigkeiten, Sicherheitswahrscheinlichkeiten (Konfidenzniveaus) und Stichprobengrößen zu ermitteln, werden die Grenzen von Konfidenzintervallen auch rechnerisch mithilfe eines MMS bestimmt.

Gegen Ende des Unterrichtsvorhabens wird auch die Mindestgröße n einer Stichprobe zu einer vorgegebenen Länge eines Konfidenzintervalls abgeschätzt.

Materialhinweise:

- Material: „Schätzen von Parametern – Prognose- und Konfidenzintervalle“ im Lehrplannavigator (<https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-sii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html>)
- Weitere Kontexte: Politbarometer; Corona-Schnelltests, auf deren Beipackzetteln oft Konfidenzintervalle angegeben sind

Unterrichtsvorhaben LK-14: Alles normal? – Untersuchung und Anwendung von stetigen Zufallsgrößen (LK-S5)

(Zeitbedarf: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß'sche Glockenkurve“), Parameter μ und σ , Graph der Verteilungsfunktion

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (19) unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion,
- (20) untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen,
- (21) beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion („Gauß'sche Glockenkurve“).

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 - Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,
 - Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
 - Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten und im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen,
- Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,

Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,

Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dazu bietet sich an, zunächst mit einem MMS die Häufigkeiten der Augensummen von zwei, drei, vier... Würfeln zu simulieren, wobei in der graphischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich des Mittelwerts und der Standardabweichung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang, beispielsweise bei der Untersuchung des Abstandes der Wurftreffer zum Mittelpunkt einer Dartscheibe oder der Länge zufällig ausgewählter Schrauben.

Hervorzuheben ist im Unterricht, dass es sich bei Normalverteilungen um Wahrscheinlichkeitsverteilungen von stetigen Zufallsgrößen handelt, im Unterschied zu den bislang behandelten diskreten Zufallsgrößen.

Da auf dem MMS (und auch auf dem WTR) Normalverteilungen einprogrammiert sind, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. LK-A3).

Die Visualisierung und Berechnung von Flächen bzw. Wahrscheinlichkeiten erfolgt mithilfe eines MMS.

Der Einsatz des MMS wird zum Anlass genommen, festzustellen, dass es sich bei der Dichtefunktion einer Normalverteilung („Gauß’sche Glockenkurve“) um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion („Gauß’sche Integralfunktion“) kein Term angegeben werden kann.

Vernetzung:

- Zur Vernetzung mit Aspekten der Analysis (Grenzwertbetrachtung, Integralrechnung) bietet sich der Bezug zu uneigentlichen Integralen an.

Unterrichtsvorhaben LK-15: Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen (LK-A6)

(Zeitbedarf: ca. 8 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,

(12) untersuchen ausgewählte Funktionen, insbesondere die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion, auf Umkehrbarkeit und ermitteln in einfachen Fällen einen Funktionsterm der Umkehrfunktion unter Berücksichtigung von Definitions- und Wertebereich,

(13) erläutern den Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen seiner Umkehrfunktion,

(19) bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, nutzen vorgegebene Stammfunktionen und verwenden die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,

Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,

Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,

Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,

Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,

Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),

Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),

Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,

Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,

Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:

Anknüpfend an das vorherige Unterrichtsvorhaben (Übergang von $a \cdot q^x$ zu $a \cdot e^{ln(q) \cdot x}$ und Umkehrung der Fragestellung bei Wachstumsprozessen wird der Logarithmus nun nicht nur als Operator, sondern als (Umkehr-) Funktion betrachtet. Die Umkehrbarkeit von Funktionen wird ausgehend von graphischen Darstellungen und jeweils variierenden Definitionsbereichen am Beispiel der natürlichen Exponential- / Logarithmusfunktion und an anderen passenden Funktionen (z.B. Potenz- / Wurzelfunktionen) sowie Transformationen von diesen thematisiert. In einfachen Fällen werden Funktionsterme von Umkehrfunktionen dabei hilfsmittelfrei ermittelt. Der Zusammenhang zwischen den Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion wird unter Berücksichtigung von Definitions- und Wertebereich als Symmetrie zur Winkelhalbierenden erkannt.

Die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion wird innermathematisch über den graphischen Zusammenhang zur natürlichen Exponentialfunktion (Winkelhalbierende als Symmetrieachse) und aus der Steigung einer gespiegelten Tangente hergeleitet. Damit wird der natürliche Logarithmus als Stammfunktion der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ identifiziert.

Vertiefung:

- Der Einfluss des Definitionsbereichs auf die Umkehrbarkeit kann gut am Beispiel der Sinus- und der Kosinusfunktion betrachtet werden.

Unterrichtsvorhaben LK-16: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln (LK-A7)

(Zeitbedarf: ca. 20 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
- (6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,
- (8) deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen,
- (9) nutzen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,

Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,

Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,

Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,

Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),

Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),

Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,

Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,

Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,

Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,

Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,

Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,

Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

In diesem Unterrichtsvorhaben werden die noch fehlenden Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) hergeleitet. Die Vorstellung des Ableitens als lokale lineare Approximation wird dabei mithilfe eines MMS aufgegriffen. Die Ableitungsregeln können zunächst als Vermutungen für die Ableitungen von Produkten von ganzrationalen Funktionen bzw. für einfache Verkettungen (z.B. Potenz einer ganzrationalen Funktion) aufgestellt und durch Ausmultiplizieren und Anwenden der bereits bekannten Ableitungsregeln überprüft werden. Mindestens eine der neuen Ableitungsregeln soll bewiesen werden. An dieser Stelle sind Differenzierungen z.B. durch Einsatz eines Beweispuzzles oder Beurteilungen von vorgelegten Argumentationsketten möglich.

Mithilfe der neu gewonnenen Ableitungsregeln werden schließlich zusammengesetzte Funktionen (auch mit Exponentialfunktionen und Sinus- / Kosinusfunktionen) untersucht und in unterschiedlichen innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben eingesetzt. Dabei werden auch Funktionsscharen betrachtet. Vorgelegte Stammfunktionen werden nachgewiesen und verwendet. Neben rechnerischen Zugängen werden außerdem Eigenschaften von Funktionen als Argumente zur Lösung von Aufgaben verwendet.

Hinweis:

- Die lineare Approximation stellt eine Möglichkeit dar, die Beweise der Ableitungsregeln fachlich korrekt und einsichtig zu notieren.

Unterrichtsvorhaben LK-17: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen (LK-A8)

(Zeitbedarf: ca. 20 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, ~~Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)~~
- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
- (6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,
- (7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung,
- (9) nutzen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge,
- (22) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen,
- (23) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen sowie mithilfe von Sinus- und Kosinusfunktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
 - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,
 - Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern,
- Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
- Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
- Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
- Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,

Pro-(5)	nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(6)	wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(8)	berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(9)	entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10)	überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(11)	analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Pro-(12)	vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Pro-(13)	benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
Arg-(5)	begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6)	entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(7)	nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8)	verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Arg-(11)	ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
Arg-(12)	beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
Kom-(1)	erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(5)	formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(6)	verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7)	wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(8)	wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(9)	dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(10)	konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(12)	nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
Kom-(13)	vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Umsetzung:

Im letzten Unterrichtsvorhaben zur Analysis werden die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Unterrichtsvorhaben gebündelt und an komplexeren Situationen sowohl bei innermathematischen Problemstellungen als auch bei Aufgaben mit Anwendungsbezug geübt und vertieft.

Anhand der Volumina von Körpern (einfache geometrische Grundkörper, Gefäße, Zeppelin, ...), die sich durch Rotation eines Graphen um die x-Achse beschreiben lassen, werden verschiedene Aspekte der Differential- und Integralrechnung vernetzt und vertieft:

- Aufstellen der Randfunktion mit Definitionsbereich (Vernetzung mit Steckbriefaufgaben)
- Integralvorstellung (Kreissscheiben, Grenzwertprozess)
- Nachweis / Bildung von Stammfunktionen
- Berechnung von bestimmten Integralen

Anschließend werden Prozesse, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamentenkonzentration, Fieber, Pflanzenwuchs...), in den Blick genommen und mithilfe von Produkten und Verkettungen von Funktionen modelliert. Dabei ergeben sich Fragen, bei denen aus der

Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamtbestand bzw. -effekt geschlossen wird. In geeigneten Kontexten werden uneigentliche Integrale als Grenzwert der jeweils zugehörigen Integralfunktion eingeführt und bestimmt.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch periodische Prozesse (z.B. Sonnenscheindauer, akustische Signale) betrachtet, bei denen Sinus- und Kosinusfunktionen mit anderen Funktionen verknüpft werden. Integrale von zusammengesetzten Funktionen, Exponentialfunktionen und Sinusfunktionen werden in diesem Unterrichtsvorhaben mit einem MMS oder mithilfe vorgegebener Stammfunktionen berechnet.

Vertiefung:

- Bei der Betrachtung von Rotationskörpern bieten Hohlkörper und der Torus (z.B. Fahrradschlauch) einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.

Vernetzung:

- Kenntnisse über uneigentliche Integrale ermöglichen ein vertieftes Verständnis der Normalverteilung und ihrer Verteilungsfunktion.

Unterrichtsvorhaben LK-18: *Untersuchungen an geometrischen Körpern unter Ein- schluss ihrer Schatten- und Spiegelbilder (LK-G5)*

(Zeitbedarf: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfelder: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (1) stellen Ebenen, Parallelogramme und Dreiecke in Parameterform dar,
- (3) stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
- (5) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
- (9) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
- (10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,
- (11) führen Spiegelungen an Ebenen durch,
- (12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum...
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,
- Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
- Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel,

Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,

Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,

Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,

Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,

Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Umsetzung:

Geometrische Körper, wie u.a. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder, bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte bezogen oder auch zur Gestaltung von virtuellen Landschaften benutzt werden. Schattenwürfe geometrischer Körper in Parallelprojektion (Sonnenlicht) oder Zentralprojektion (Lichtquelle) auf eine Ebene, insbesondere eine Grundebene, werden berechnet. Der Einsatz eines MMS bietet hier zusätzliche Möglichkeiten der Variation und der Visualisierung.

Durch Symmetriebetrachtungen (z.B. beim Übergang zur Doppelpyramide / zum Oktaeder) wird die Frage nach einer systematischen Untersuchung von Spiegelungen an Ebenen evoziert. Dabei wird das Verfahren der Lotfußpunktbestimmung mit Hilfe eines Normalenvektors (LK-G2) wiederaufgegriffen, wobei in der Spiegelungsebene die Schattenbilder erneut auftreten.

Abstandsbestimmungen von Punkten zu Geraden (LK-G4) und zu Ebenen (LK-G2) ermöglichen es, die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen.

Im Rahmen der Untersuchung geometrischer Körper werden Winkel zwischen den Kanten und Flächen eines Körpers bestimmt. Speziell die Böschungswinkel an einer Pyramide motivieren die Frage nach dem Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen. Die Parameterform von Ebenen hat ihren Einsatz vor allem da, wo es um die Frage geht, ob ein Durchstoßpunkt einer Geraden (z.B. ein Lotfußpunkt, Schattenpunkt) eine bestimmte Fläche trifft oder außerhalb dieser liegt.

In diesem Unterrichtsvorhaben wird im Sinne einer wissenschaftspropädeutischen Grundbildung besonderer Wert auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der Dokumentation von Lösungswegen gelegt.

Vernetzung:

- Inhaltlich nimmt die Parallelprojektion die Behandlung von Schrägbildern aus dem UV E-G1 wieder auf.
- Beim Berechnen von Flächen und Volumina werden, wo möglich, auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt. Vertiefend ist hier auch der Einsatz des Vektorproduktes (vgl. LK-G3) möglich.

Vertiefung:

- Virtuelle Landschaften mit Lichteffekten können im Rahmen einer begrenzten Projektarbeit/Facharbeit mit räumlicher Geometriesoftware gestaltet werden. In einem Kaleidoskop können Spiegelungen verkettet werden und so auch Drehsymmetrien erzeugt werden.

- Ein MMS bietet die Möglichkeit, vertiefend das Spatprodukt bzw. die Determinante als Kontrollgröße für Volumina kennenzulernen, ohne die dahinterliegenden algebraischen Strukturen offenzulegen. Auch über die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren und speziell über den Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden können damit Aussagen gemacht werden, die ein tiefergehendes geometrisches Verständnis unterstützen.

Unterrichtsvorhaben LK-19: Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen

(LK-G6)

(Zeitbedarf: ca. 10 Ustd.)

Inhaltsfelder: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Verknüpfung aller Bereiche

Kompetenzerwartungen:

Integrierende Wiederholung aller Kompetenzen des Inhaltsfeldes

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
- Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
- Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
- Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
- Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
- Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
- Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
- Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
- Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
- Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
- Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter,
- Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

Angesichts des begrenzten Zeitrahmens ist es wichtig, den Fokus der Unterrichtstätigkeit nicht auf die Vollständigkeit einer „Rezeptsammlung“ und deren hieb- und stichfeste Einübung zu allen denkbaren Varianten zu legen, sondern bei den Schülerinnen und Schülern prozessbezogene Kompetenzen zu entwickeln, die sie in die Lage versetzen, problemhafte Aufgaben zu bearbeiten und dabei auch neue Anregungen zu verwerten.

In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösungen mit prozessbezogenen Zielen zu verbinden:

1) eine planerische Skizze anzufertigen und die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt zu beschreiben, 2) geometrische Hilfsobjekte einzuführen, 3) an geometrischen Situationen Fallunterscheidungen vorzunehmen, 4) bekannte Verfahren zielgerichtet einzusetzen und in komplexeren Abläufen zu kombinieren, 5) unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt zu vergleichen.

Bei der Durchführung der Lösungswege können die Schülerinnen und Schüler auf das entlastende Werkzeug MMS zurückgreifen und dessen Grenzen ausloten. Bei aufwendigeren Problemen soll dieser Teil der Lösung bewusst ausgeklammert werden.

Die erworbenen Kompetenzen im Problemlösen sollen auch in Aufgaben zum Einsatz kommen, die einen Kontextbezug enthalten, so dass dieses Unterrichtsvorhaben auch unmittelbar auf das Abitur vorbereitet.

Vertiefung:

- Bei Beweisaufgaben, in denen die prozessbezogenen Kompetenzen des Argumentierens und Problemlösen zusammengeführt werden müssen, sollen die Schülerinnen und Schüler auch Formalisierungen in Vektorschreibweise rezipieren und z.T. selbst vornehmen.

Summe Leistungskurs Q2: 150 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 103 Unterrichtsstunden

3.1.5 MKR

Integration der Ziele des Medienkompetenzrahmens NRW (MKR)

in den Kernlehrplan Mathematik für die gymnasiale Oberstufe

Als Querschnittsaufgabe über alle Fächer und den gesamten Bildungsgang trägt der neue Kernlehrplan für die gymnasiale Oberstufe u.a. zu einer Bildung in einer zunehmend digitalen Welt bei.

Die Ziele des Medienkompetenzrahmens NRW werden in alle Schulfächer integriert. In der Synopse

werden die entsprechenden Kompetenzen und Inhalte des vorliegenden Kernlehrplans aufgeführt.

Alle Fächer tragen auch in der Sekundarstufe II dazu bei, dass das Lernen und Leben mit digitalen

Medien zur Selbstverständlichkeit im Unterricht wird und leisten ihren spezifischen Beitrag zur

Entwicklung der geforderten Kompetenzen.

MKR 1.1: Medienausstattung (Hardware) kennen, auswählen und reflektiert anwenden

Die Schülerinnen und Schüler

Ope-11:

- nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-13:

- entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus.

MKR 1.2: Digitale Werkzeuge: Verschiedene digitale Werkzeuge und deren Funktionsumfang kennen, auswählen sowie kreativ, reflektiert und zielgerichtet einsetzen

Die Schülerinnen und Schüler

Kom-7:

- wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (grafisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,

Ope-11:

- nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,

Ope-12:

- verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...,

Ope-13:

- entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,

GK-A(7):

- untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung,

LK-A(7):

- untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung,

GK/LK-S(1):

- planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,

GK/LK-S(3):

- verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge.

MKR 1.3: Datenorganisation: Informationen und Daten sicher speichern, wiederfinden und von verschiedenen Orten abrufen; Informationen und Daten zusammenfassen, organisieren und strukturiert aufbewahren.

Die Schülerinnen und Schüler

Ope-11:

- nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden.

MKR 2.1: Informationsrecherche: Informationsrecherchen zielgerichtet durchführen und dabei Suchstrategien anwenden

Ope-10:

- recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch.

MKR 2.2: Informationsauswertung: Themenrelevante Informationen und Daten aus Mediенangeboten filtern, strukturieren, umwandeln und aufbereiten

Die Schülerinnen und Schüler

Kom-1:

- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,

MKR 2.3: Informationsbewertung: Informationen, Daten und ihre Quellen sowie dahinterliegende Strategien und Absichten erkennen und kritisch bewerten

Die Schülerinnen und Schüler

Ope-10:

- recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,

Kom-14:

- vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten.

MKR 4.1: Medienproduktion und Präsentation: Medienprodukte adressatengerecht planen, gestalten und präsentieren; Möglichkeiten des Veröffentlichens und Teilens kennen und nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

Kom-10:

- konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,

Ope-11:

- nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden.

MKR 4.2: Gestaltungsmittel: Gestaltungsmittel von Medienprodukten kennen, reflektiert anwenden sowie hinsichtlich ihrer Qualität, Wirkung und Aussageabsicht beurteilen.

Die Schülerinnen und Schüler

Kom-10:

- konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte.

MKR 4.3: Quellendokumentation: Standards der Quellenangaben beim Produzieren und Präsentieren von eigenen und fremden Inhalten kennen und anwenden.

Die Schülerinnen und Schüler

Kom-10:

- konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte.

MKR 5.4: Selbstregulierte Mediennutzung: Medien und ihre Wirkungen beschreiben, kritisch reflektieren und deren Nutzung selbstverantwortliche regulieren; andere bei ihrer Mediennutzung unterstützen

Die Schülerinnen und Schüler

Ope-13:

- entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,

Ope-14:

- reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge.

MKR 6.2: Algorithmen erkennen: Algorithmische Muster und Strukturen in verschiedenen Kontexten erkennen, nachvollziehen und reflektieren

Die Schülerinnen und Schüler

GK-G(7)/LK-G(6):

- erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme,

GK-G(8)/LK-G(7):

- wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.

3.1.6 Vertiefungskurse

Arbeitsschritte, Arbeitsformen und Materialien

Grundlage für dieses Konzept bilden die Begleitmaterialien zum Vertiefungskurs aus dem Klett-Verlag (Lambacher Schweizer – Mathematik für Gymnasien – Einführungsphase – Vertiefungskurs 1 bis 3), außerdem die beiden Begleitbände des Schroedel Verlags (Elemente der Mathematik – Einführungsphase – Vertiefungsfach Teil 1 und Teil 2) und das Arbeitsheft aus dem Cornelsen Verlag (*Einführungsphase Gymnasiale Oberstufe NRW – Vertiefungsfach Mathematik*).

Folgende Vorgehensweise hat sich als positiv und sinnvoll erwiesen:

- Die Kursteilnehmer dokumentieren ihre Arbeit in einem Portfolio. Darin werden die zur Verfügung gestellten Materialien der Lehrkräfte, Kursergebnisse und individuell Erarbeitetes (Fachinhaltliches, Dokumentation des eigenen Lernprozesses) abgeheftet. Auch die Ergebnisse von Modul D und die Eingangstests zu den verschiedenen Modulen sowie ggf. Lern- und Förderempfehlungen werden dem Portfolio hinzugefügt. Auf diese Weise wird mehr Transparenz über den Lernprozess erzielt und Selbstreflexion gefördert.
- Alle Module beginnen mit einer *Selbsteinschätzung* (SE) aus dem Begleitmaterial des Klett-Verlages. In dieser Selbsteinschätzung stehen den Kursteilnehmern drei Spalten zur Verfügung, in denen sie zu Beginn (*spontane* SE), nach Bearbeitung der Testaufgaben und nach Bearbeitung des gesamten Moduls ihre Selbsteinschätzung z.B. mit Schulnoten formulieren können.
- Im Anschluss an die SE erhalten die Kursteilnehmer *Testaufgaben* (Klett Verlag) zur Wiederholung der inhaltlichen Grundlagen, die jeweils zu der Kompetenz der SE mit der entsprechenden Nummer passen. Diese Aufgaben werden in Einzel- oder Partnerarbeit bearbeitet. In einem Unterrichtsgespräch zum Ende dieser Phase werden die gewünschten Aufgaben ausführlich besprochen. Zusätzlich erhalten die Kursteilnehmer die sehr ausführlichen und mit Kommentaren versehenen Musterlösungen für alle Aufgaben, um nochmals ihre Ergebnisse überprüfen und damit in der nächsten Phase gezielt üben zu können.
- Zu jeder Kompetenz der SE bzw. zu jeder Testaufgabe gibt es im Begleitmaterial des Klett-Verlages ähnliche Standardaufgaben, die im Anschluss an die gemeinsame Erarbeitung ausgelegt werden. Die Schülerinnen und Schüler suchen sich die für ihre Übungsphase geeigneten Aufgabenblätter aus und finden sich auf Wunsch zu kleineren Arbeitsgruppen zusammen. Die Bearbeitung kann in verschiedenen Räumen erfolgen, wobei sich hier vor allem das Selbstlernzentrum anbietet, in dem es bei Bedarf auch die Möglichkeit der Internet-Recherche gibt.

Individuelle Förderung

Auf diese Weise wird der individuelle Übungsbedarf aufgegriffen und die Selbstverantwortung der Schüler für den eigenen Lernprozess gestärkt. Auch die Möglichkeit der gegenseitigen Hilfe stabilisiert den Lernerfolg und erhöht das „mathematische“ Selbstwertgefühl.

Die Lehrkraft steht für die Klärung individueller Probleme zur Verfügung und kann auf diese Weise dem Lernenden unterschiedliche Zugänge, Herangehensweisen und Methoden anbieten, so dass Schülerinnen und Schüler entsprechend ihrer Vorkenntnisse und Fähigkeiten Ansatzmöglichkeiten selbstständig finden.

Die Lösungen werden ausgelegt, so dass eine Selbstkontrolle möglich ist und gezielt Fragen gestellt werden können.

Zum Abschluss dieser Phase entscheiden die Kursteilnehmer über die Themen, die sie im Plenum besprechen oder selbst Mitschülern vorstellen möchten.

- Jeder Schüler, der das Gefühl hat, die Standardaufgaben zu beherrschen, kann seine Kompetenzen im Bereich der *vertiefenden Aufgaben* festigen. Diese Aufgaben entsprechen nicht dem Muster der Test- und Standardaufgabe und erfordern meist einen neuen Lösungsansatz.

Auch im Bereich der Standardaufgaben stehen – sofern gewünscht und erforderlich – weitere Aufgaben zur Verfügung.

- Eine *Nachdiagnose* zu den einzelnen Themen (Cornelsen Verlag) ermöglicht den Lernenden eine Kontrolle über ihren Lernfortschritt bzw. -zuwachs. Hier können sie eintragen, wie sie mit der Lösung der einzelnen Aufgaben der Nachdiagnose zurechtgekommen sind. Auf diese Weise können die Schülerinnen und Schüler weiteren Übungsbedarf gezielt feststellen und evtl. um ergänzendes Übungsmaterial für zu Hause nachfragen.

Nach erstmaliger Durchführung des Vertiefungskurses wurde das Konzept unter Einbeziehung der Lernenden evaluiert. Eine weitere Evaluation erfolgte 2014 auf Grundlage der Erfahrungen der den Vertiefungskurs unterrichtenden Lehrkräfte.

4. Kriterien der Leistungsbewertung im Fach Mathematik

Grundsätzliches

Leistungsfeststellungen und Leistungsbewertungen geben den Schülerinnen und Schülern Rückmeldungen über den erreichten Kompetenzstand. Individuelle Lernfortschritte werden bei der Leistungsfeststellung berücksichtigt. Grundsätzlich ist zwischen Lern- und Leistungssituationen zu unterscheiden. In Lernsituationen ist das Ziel Kompetenzerwerb. Fehler und Umwege dienen den Schülerinnen und Schülern als Erkenntnismittel, den Lehrkräften geben sie Hinweise für die weitere Unterrichtsplanung. Das Erkennen von Fehlern und der produktive Umgang mit ihnen sind konstruktiver Teil des Lernprozesses. Bei Leistungs- und Überprüfungssituationen steht die Vermeidung von Fehlern im Vordergrund. Das Ziel ist, die Verfügbarkeit der erwarteten Kompetenzen nachzuweisen. Für die Feststellung der Leistung werden die Ergebnisse schriftlicher, mündlicher und anderer spezifischer Leistungen herangezogen.

Die rechtlich verbindlichen Grundsätze der Leistungsbewertung sind im Schulgesetz des Landes NRW ([§48 SchulG-NRW](#)) sowie in der Ausbildungs- und Prüfungsordnung für die Sekundarstufe I ([§6 APO-SI](#)) verankert. Danach sind die von den Schülern und Schülerinnen erbrachten Leistungen in den Beurteilungsbereichen „Schriftliche Arbeiten“ und „Sonstige Leistungen“ im Unterricht zur Ermittlung der Gesamtnote angemessen mit annähernd gleichem Stellenwert zu bewerten.

1. Mathematischen Kompetenzen

Im Rahmen der geforderten Kompetenzorientierung im Fach Mathematik sind alle fachbezogenen Kompetenzbereiche bei der Leistungsbewertung zu berücksichtigen.

Kernlehrplan Mathematik Sek I Gymnasium

fachbezogene Kompetenzen					
prozessbezogene Kompetenzen			inhaltsbezogene Kompetenzen		
	Argumentieren	Argumentieren und Kommunizieren		Arithmetik/Algebra	mit Zahlen und Symbolen umgehen
	Problemlösen	Probleme erfassen, erkunden und lösen		Funktionen	Beziehungen und Veränderung beschreiben und erkunden
	Modellieren	Modelle erstellen und nutzen		Geometrie	ebene und räumliche Strukturen nach Maß und Form erfassen
	Werkzeuge	Medien und Werkzeuge verwenden		Stochastik	mit Daten und Zufall arbeiten

Die prozessbezogenen Kompetenzen haben den gleichen Stellenwert wie die inhaltsbezogenen Kompetenzen. Neben Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten umfassen die erwarteten Kompetenzen auch Bereitschaften, Haltungen und Einstellungen, die die Schülerinnen und Schüler benötigen, um Anforderungssituationen zu bewältigen und sich alleine oder gemeinsam mit anderen auf mathematische Problemstellungen einzulassen und bei auftretenden Schwierigkeiten nicht aufzugeben. Die in den Richtlinien definierten prozessbezogenen Kompetenzen werden im Folgenden aufgelistet und erläutert:

Leistungskonzept

Argumentieren / Kommunizieren

Dazu gehört:

- Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es ...?“, „Wie verändert sich...?“, „Ist das immer so?“) und Vermutungen begründet äußern,
- mathematische Argumentationen entwickeln (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise),
- Lösungswege beschreiben und begründen.
- Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren, auch unter Nutzung geeigneter Medien,
- die Fachsprache adressatengerecht verwenden,
- Äußerungen von anderen und Texte zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen.

Problemlösen

Dazu gehört:

- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,
- geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden (z.B. Zerlegen in Teilprobleme, systematisches Probieren, Zurückführen auf Bekanntes, Verallgemeinern)
- die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und die Lösungswege reflektieren.

Modellieren

Dazu gehört:

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,
- in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten,
- Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.
- mathematischen Modellen Realsituationen zuordnen

Werkzeuge

Dazu gehört:

- Lineal, Geodreieck, Zirkel zum genauen Messen, Zeichnen und Konstruieren verwenden
- Informationen aus Büchern und Internet beschaffen und mit geeigneten Hilfsmitteln präsentieren (z.B. Folie, Tafel, Plakat)
- Eigene Arbeit in schriftlicher Form angemessen dokumentieren
- mathematische Werkzeuge wie Formelsammlungen, Taschenrechner, Software (z.B. Excel, Geogebra) sinnvoll und verständig einsetzen.

In den bundeseinheitlichen Bildungsstandards der KMK sind langfristig erwartete Kompetenzen formuliert, die zusammen mit den Kernlehrplänen Mathematik (Gymnasium Sek I und Sek II) die Grundlage für die Leistungsbewertung im Fach Mathematik bilden.

2. Notendefinitionen

Die nachfolgenden Notendefinitionen entstammen **§ 48 (3) des SchulG-NRW**.

Notenbezeichnung	Ziffer	Notendefinition
sehr gut	1	Die Note „sehr gut“ soll erteilt werden, wenn die Leistung den Anforderungen in besonderem Maße entspricht.
gut	2	Die Note „gut“ soll erteilt werden, wenn die Leistung den Anforderungen voll entspricht.
befriedigend	3	Die Note „befriedigend“ soll erteilt werden, wenn die Leistung im Allgemeinen den Anforderungen entspricht.
ausreichend	4	Die Note „ausreichend“ soll erteilt werden, wenn die Leistung zwar Mängel aufweist, aber im Ganzen den Anforderungen noch entspricht.
mangelhaft	5	Die Note „mangelhaft“ soll erteilt werden, wenn die Leistung den Anforderungen nicht entspricht, jedoch erkennen lässt, dass die notwendigen Grundkenntnisse vorhanden sind und Mängel in absehbarer Zeit behoben werden könnten.
ungenügend	6	Die Note „ungenügend“ soll erteilt werden, wenn die Leistung den Anforderungen nicht entspricht und selbst die Grundkenntnisse so lückenhaft sind, dass die Mängel in absehbarer Zeit nicht behoben werden können.

3. Sonstige Leistungen

Zum Bereich „Sonstige Mitarbeit“ gehören Beiträge zum Unterrichtsgespräch, beim selbstständigen Arbeiten, in Gruppenarbeit, bei der Mitarbeit in Projekten sowie bei der Präsentation von Arbeitsergebnissen. Basis der Leistungsbewertung im Beurteilungsbereich „Sonstige Mitarbeit“ sind die Beiträge der Schülerinnen und Schüler zum Unterrichtsgespräch. Die Lehrerinnen und Lehrer sollten die Schülerleistungen über einen längeren Zeitraum beobachten und die Entwicklung berücksichtigen. Es wird angeraten, dass Lehrerinnen und Lehrer regelmäßig ihre Beobachtungen der unterrichtlichen Leistungen und ein Urteil dokumentieren. Hausaufgaben ergänzen die unterrichtliche Arbeit. Sie dienen zur Festigung und Sicherung des im Unterricht Erarbeiteten sowie zur Vorbereitung des Unterrichts. Eine regelmäßige Kontrolle – auch durch die Schülerinnen und Schüler gegenseitig – dient der Bestätigung korrekter Lösungen oder der Berichtigung von Fehlern. In der Sekundarstufe II wird der selbstständigen Arbeit ein erhöhter Stellenwert zu geschrieben. Die Teilnote im Beurteilungsbereich „Sonstige Mitarbeit“ wird unabhängig von der Teilnote im Bereich „Arbeiten/Klausuren“ gebildet. Sie wird den Schülerinnen und Schülern quartalsweise mitgeteilt und auf Wunsch erläutert. Der kontinuierliche Anteil der „Sonstigen Mitarbeit“ ist dabei hinsichtlich der Quantität und Qualität zu beurteilen. Eine gesicherte Beurteilung der „Sonstigen Mitarbeit“ sollte möglich sein, wenn als Basis für die Quartalsnoten Beobachtungen der unterrichtlichen Leistungen und ggf. Teilnoten regelmäßig dokumentiert werden. Die Fachkonferenz Mathematik hat Kriterien für die Bewertung der Leistungen im Mathematikunterricht festgelegt und in nachfolgender Tabelle festgehalten. Diese werden den Schülerinnen und Schülern zu Beginn jedes Schuljahres transparent gemacht. Zusätzlich zu den Kriterien legt die Fachschaft Mathematik fest, dass eine Note nicht nur erreicht werden kann, wenn alle Leistungskriterien eingelöst werden, sondern auch durch besonders fundiert eingelöste Aspekte, die weitere Kriterien substituieren können.

4.1 Kriterien der sonstigen Mitarbeit im Fach Mathematik

	Häufigkeit der Mitarbeit	Qualität der Mitarbeit	Beherrschung der Fachmethoden und der Fachsprache	Zusammenarbeit mit Mitschülern / im Team	Andere Leistungen (Referate, Vorträge, Präsentationen, ...)	Bereithalten der Arbeitsmaterialien ² , Anfertigen von HA, ggf. schriftl. Überprüfung der HA, Selbstorganisation
Sehr gut Die Leistung entspricht in diesem Bereich den Anforderungen in besonderem Maße.	SuS arbeiten in jeder Stunde immer mit.	SuS können Gelerntes sicher wiedergeben und anwenden. Oft werden komplexe Probleme erfasst, in größere Zusammenhänge eingeordnet und selbstständig Lösungsstrategien entwickelt. SuS zeigen eigene Initiative nach weiteren konstruktiven Vorschlägen zur Untersuchung und Lösung mathematischer Probleme zu suchen.	SuS können die gelerten Methoden sehr sicher anwenden. Die Fachsprache wird umfangreich und souverän beherrscht. Die Beiträge erfolgen in mehreren zusammenhängenden Sätzen, die eine selbstständige, differenzierte und produktive Antwort beinhalten.	SuS hören immer zu und gehen sachlich auf andere ein, indem sie die Lösungsvorschläge ihrer Mitschüler sinnvoll weiterdenken. Sie arbeiten mit anderen an einer Sache, dokumentieren ihr Vorgehen sinnvoll und bringen diese immer zu, Abschluss.	SuS sind sehr häufig und auch freiwillig bereit, „andere Leistungen“ in den Unterricht einzubringen.	SuS haben immer alle Materialien mit, machen immer Hausaufgaben und haben eine perfekte Selbstorganisation. Das Mathematikheft ist vollständig und übersichtlich.

Leistungskonzept

Gut Die Leistung entspricht in diesem Bereich voll den Anforderungen.	SuS arbeiten in jeder Stunde mehrfach mit.	SuS können Gelerntes sicher wiedergeben und anwenden; manchmal werden auch neue Lösungswege gefunden. SuS können auch komplexere Probleme erfassen und selbstständig Lösungs-ideen entwickeln.	SuS können die gelerten Methoden meist sicher anwenden. Die Fachsprache wird sicher beherrscht. Die Beiträge erfolgen meist in mehreren zusammenhängenden Sätzen, die eine selbstständige, differenzierte und produktive Antwort beinhalten.	SuS hören zu und gehen sachlich auf andere ein. Sie arbeiten mit anderen an einer Sache, dokumentieren ihr Vorgehen sinnvoll und bringen diese meistens zum Abschluss.	SuS sind häufig und auch freiwillig bereit, „andere Leistungen“ in den Unterricht einzubringen.
Befriedigend Die Leistung entspricht in diesem Bereich den Anforderungen.	SuS arbeiten (wenn auch nicht in jeder Stunde) häufig mit.	SuS können Gelerntes wiedergeben und meist auch anwenden. Durch Rückgriff auf bekannte Lösungsstrategien können mathematische Sachverhalte bearbeitet werden.	SuS können die gelerten Methoden vom Prinzip her anwenden. Die Fachsprache wird solide beherrscht.	SuS hören oft zu und gehen sachlich auf andere ein. Sie können im Prinzip mit anderen an einer Sache arbeiten, dokumentieren ihr Vorgehen sinnvoll und bringen diese häufig zum Abschluss.	SuS sind manchmal oder nach Aufforderung bereit, „andere Leistungen“ in den Unterricht einzubringen.
Ausreichend Die Leistung zeigt in diesem Bereich Mängel, entspricht aber im Ganzen jedoch den Anforderungen	SuS arbeiten nur selten mit oder müssen aufgefordert werden.	SuS können Gelerntes meist grob wiedergeben, aber nicht immer bei anderen Beispielen anwenden. Die Beiträge sind eher reproduktiv oder beschreibend.	SuS können die gelerten Methoden nicht immer anwenden. Die Fachsprache wird nicht klar beherrscht, eine Bemühung der Anwendung ist jedoch erkennbar.	SuS hören nur selten zu, wenn andere reden und gehen auch nicht immer auf andere ein. Sie arbeiten nur ungern mit anderen an einer Sache und dokumentieren ihr Vorgehen überwiegend.	SuS sind selten bereit, „andere Leistungen“ in den Unterricht einzubringen.

Leistungskonzept

Mangelhaft Die Leistung entspricht in diesem Bereich nicht den Anforderungen. Grundkenntnisse sind vorhanden, Mängel können in absehbarer Zeit behoben werden.	SuS arbeiten ganz selten mit oder müssen immer aufgefordert werden.	SuS können Gelerntes nur mit Lücken oder falsch wiedergeben. Eine Anwendung auf andere Beispiele findet kaum statt.	SuS können gelernte Methoden kaum oder gar nicht anwenden. Die Fachsprache wird kaum beherrscht.	SuS hören kaum zu, wenn andere reden und gehen auch nur ganz selten auf die Argumente anderer ein. Sie arbeiten nur sehr ungern mit anderen und dokumentieren ihr Vorgehen kaum.	SuS bringen „andere Leistungen“ gar nicht in den Unterricht ein.	SuS haben häufig die Materialien nicht mit, fertigen auch meist keine Hausaufgaben an und sind zumeist unorganisiert. Das Mathematikheft hat deutliche Lücken, beinhaltet jedoch zentrale Mitschriften.
Ungenügend Die Leistungen entsprechen nicht den Anforderungen und selbst Grundkenntnisse sind so lückenhaft, dass die Mängel in absehbarer Zeit nicht behoben werden können.						

1 Positive Kriterien aus einem niedrigeren Notenbereich gelten in gesteigerter Form für höhere Notenbereiche. Ein einzelnes Kriterium allein kann keine Notenab- oder -aufwertung begründen.

2 Zu den Arbeitsmaterialien im Fach Mathematik gehören das Mathematikbuch, das Arbeitsheft bzw. Ordner und ggf. ein zum Lehrwerk gehöriges Arbeitsheft sowie Taschenrechner, Geodreieck und Zirkel.

3 Zur besseren Übersicht wird in der Tabelle die Abkürzung SuS für Schülerinnen und Schüler verwendet.

4.2 Mitarbeit im Unterricht

Im Unterricht gibt es vielfältige Möglichkeiten für die Schülerinnen und Schüler zu zeigen, wie weit sie ihrem Alter angemessen über fachspezifische Kompetenzen verfügen. Die Bewertung der sonstigen Mitarbeit erfolgt im Wesentlichen anhand der folgenden Kriterien:

mündliche Mitarbeit zum Unterricht, z.B.

- Anwenden fachspezifischer Methoden und Arbeitsweisen
- Einbringen kreativer Ideen
- konstruktives Umgehen mit Fehlern
- Finden von Beispielen oder Gegenbeispielen
- verständliches und präzises Darstellen, Erläutern von Lösungen
- Veranschaulichen, Zusammenfassen und Beschreiben mathematischer Sachverhalte
- Verfügbarkeit mathematischen Grundwissens (Begriffe, Sätze, Verfahren)
- angemessenes Verwenden mathematischer Fachsprache
- Erläutern von Hausaufgaben, z.B. verständliches Vortragen der Lösungswege; (schriftliches) Belegen von Schwierigkeiten bei ungelösten Hausaufgaben, sachgerechtes Einbringen von Lösungen bei unterrichtsvorbereitenden Aufgaben
- sinnvolles Umgehen mit technischen Hilfsmitteln (z.B. Taschenrechner, Geogebra)
- zielgerichtetes Beschaffen von Informationen (z.B. Internet, Lexika, Schulbuch, Umfragen)
- fehlerfreies Anwenden geübter Fertigkeiten

sonstige Beiträge zum Unterricht, z.B.

- Ergebnisse von Partner- oder Gruppenarbeiten und deren Darstellung
- Unterrichtsdokumentation (z.B. Heftführung, Lerntagebuch)
- Präsentationen, auch mediengestützt (z.B. Referat, Plakat, Modell)
- Kommunikationsfähigkeit in Unterrichtsgesprächen und Kleingruppenarbeiten
- ggf. kurze schriftliche Überprüfungen

Grundsätzliche Kriterien bei der Beurteilung der Heftführung:

Bewertungsbogen zur Heftführung im Fach Mathematik			
Bewertungskriterium	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Arbeitsblätter sind vollständig, eingeklebt und in Reihenfolge			
Inhaltlich vollständig (Alle Aufgaben sind im Heft)			
Beim Zeichnen und Gestalten hast du dir viel Mühe gegeben.			
Deine Mappe ist unbeschädigt und sieht ordentlich aus.			
Die Seiten sind übersichtlich: Überschriften, Absätze, Rand.			
Deine Schrift ist sauber und ordentlich.			
Zusätzliche Bemerkungen:			
Datum:	Note:	Unterschrift:	

4.3 Schriftliche Leistungen

Klassenarbeiten und Klausuren beziehen sich überwiegend auf den unmittelbar voran-gegangenen Unterricht. Aber es müssen auch Problemstellungen aufgenommen werden, die im Rahmen der Vernetzung ausreichend wiederholt wurden. Die Aufgaben in Klassenarbeiten sind zum Großteil dem Anforderungsbereich II (Reorganisation, Zusammenhänge herstellen) zuzuordnen, der Anforderungsbereich I (Reproduzieren) erhält den zweitgrößten Stellenwert und der Anforderungsbereich III (Verallgemeinern, Reflektieren und Bewerten) den dritt-größten Stellenwert. Für die Sekundarstufe I empfiehlt die Fachkonferenz Mathematik die Grenze zwischen 4– und 5+ bei 50 % zu setzen, dann linear die weiteren Noten zu verteilen. Die Tendenzen + und – werden in den entsprechenden Notenstufen äquidistant eingeteilt.

Da in Klausuren neben der Verdeutlichung des fachlichen Verständnisses auch die Darstellung bedeutsam ist, muss diesem Sachverhalt bei der Leistungsbewertung hinreichend Rechnung ge-tragen werden. Gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit führen gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt zu einer Absenkung der Leistungsbewertung um eine Notenstufe in der Einführungsphase und um bis zu zwei Notenstufen in der Qualifikationsphase.

In der Qualifikationsphase Q1, 2. Halbjahr, kann die erste Klausur durch die Anfertigung einer Facharbeit ersetzt werden. Facharbeiten werden von der Fachlehrerin bzw. dem Fachlehrer korrigiert und bewertet. Die Note wird in einem Gutachten begründet. Neben der eigentlichen Arbeit können Beobachtungen während der Anfertigung der Facharbeit dazu beitragen, die Leistung richtig einzuschätzen und angemessen zu bewerten. Für die Beurteilung sind fachliche und überfachliche Gesichtspunkte zu berücksichtigen.

Die folgenden Tabellen zeigen die prozentualen Anteile der Rohpunkte, ab denen in etwa die verschiedenen Noten erreicht sind. Hierbei kann es sich nur um eine ungefähre Zuordnung handeln, da Noten pädagogische und nicht mathematische Bewertungsinstrumente sind.

4.3.1 Sekundarstufe I

Sehr gut	Gut	Befriedigend	Ausreichend	Mangelhaft	Ungenügend
87,5%	75%	62,5%	50%	25%	0%

Zusätzlich:

Bewertung der Darstellungsleistung anhand der Kriterien Schriftbild, genaues Zeichnen/Beschriften, Darstellung des Rechenweges und Antwortsätze.

In den Jahrgangsstufen 5 und 6 sollen, in den Jahrgangsstufen 7 bis 9 können Darstellungspunkte gegeben werden

4.3.2 Sekundarstufe II

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1+	1	1-	2+	2	2-	3+	3	3-	4+	4	4-	5+	5	5-	6
95%	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	33	27	20	0

4.4 Dauer und Anzahl der Klassenarbeiten / Klausuren

Stufe Anzahl pro Schuljahr Dauer in Schulstunden (45 min)

Jahrgangsstufe	Anzahl im Schuljahr	Dauer
5	6	1
6	6	1
7	5 (2+3)	1
8	4 (2+2)	1-2
9	4	1-2 (im 2. Hj min. eine Arbeit 2-stündig)
10	3 (2+1)	2
EF (bis Abiturjahrgang 2020)	4	2
EF (ab Abiturjahrgang 2021)	4	90 min
Q1 LK (ab Abiturjahrgang 2021)	4	155 min
Q1 GK (ab Abiturjahrgang 2021)	4	90 min
Q2 LK (ab Abiturjahrgang 2021)	2 + Vorabitur + Abitur	225 min + 270 min + 270 min
Q2 GK (ab Abiturjahrgang 2020)	2 + ggf. Vorabitur + ggf. Abitur	155 min + 225min + 225 min

4.5 Gesamtnote (Wertungsverhältnis: Mitarbeit im Unterricht / schriftlich)

In allen Jahrgängen der Sekundarstufe I und II setzt sich die Zeugnisnote zu gleichen Teilen aus der Mitarbeit im Unterricht („SoMi-Note“) sowie den schriftlichen Leistungen zusammen (d.h. 50% schriftlich: 50% mündlich). Dabei besteht die „SoMi-Note“, wie zuvor erläutert, aus der mündlichen Mitarbeit sowie den sonstigen Beiträgen zum Unterricht (s.o.); die kontinuierlichen mündlichen Beiträge sollten jedoch deutlich stärker bei der Findung der Note berücksichtigt werden als die sonstigen Beiträge zum Unterricht.